



# IL FUSIONISMO: moda didattica o riflessione sui fondamenti della geometria?

Maria Teresa Borgato  
Dipartimento di Matematica,  
Università di Ferrara  
5 aprile 2014



# Dalla geometria piana alla solida o viceversa?

Col termine *fusionismo* si intende un orientamento nell'insegnamento della geometria elementare, che si sviluppò in Europa a partire dagli anni '40 dell'Ottocento, e in Italia tra il 1884 e il 1910 circa, secondo il quale vengono trattati contemporaneamente argomenti affini di geometria piana e geometria dello spazio e si utilizza quest'ultima anche per dimostrazioni di geometria piana.

Non si trattò esclusivamente di una moda didattica, ma anche di una risposta alle ricerche sui fondamenti della geometria, che nella seconda metà dell'Ottocento furono tra i temi di attualità della comunità matematica e influenzarono la produzione di una grande varietà di testi scolastici.

# Origini del fusionismo

L'utilità di considerazioni di geometria dello spazio nelle dimostrazioni di proposizioni di geometria piana, era stata riconosciuta nell'ambito della geometria proiettiva da Monge, Brianchon e Poncelet.

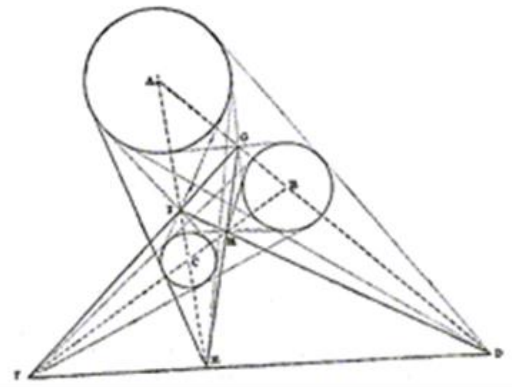
Così Michel Chasles esordiva per illustrare le grandi potenzialità del 'metodo di Monge':

*Monge nous donna, dans son Traité de Géométrie descriptive, les premiers exemples de l'utilité de l'alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes.... Les procédés par lesquels Monge transforma les figures de l'espace en figures planes, par des projections orthogonales sur deux planes rectangulaires qu'il suppose abattus l'un sur l'autre, offrent en particulier un moyen de découvrir une foule de propositions de Géométrie plane sur les figures que résultent de l'ensemble de ces deux projections.*

M. Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, Bruxelles, Hayez, 1837, pp. 191-194.

# Il teorema di Monge sui centri di omotetia di tre cerchi

**Tre cerchi qualunque del piano considerati a due a due hanno le tangenti comuni che si incontrano in tre punti allineati.**



Questa proposizione è dimostrata da Monge con grande semplicità immaginando i cerchi dati come sezioni centrali di tre sfere e quindi considerando i tre coni involuppati dai piani che ne toccano esternamente due qualunque.

Si consideri il piano tangente esternamente a tutte e tre le sfere: questo piano sarà tangente esternamente anche ai tre coni circoscritti alle sfere considerate a due a due, e passerà per i loro vertici  $D$ ,  $E$ ,  $F$ .

Ma questi tre vertici sono pure nel piano dei tre centri, dunque si trovano all'intersezione di due piani diversi, e per conseguenza sono in linea retta.

# planimetria e stereometria non più discipline separate?

## Il fusionismo in Francia, Germania e Svezia

Gergonne (*Annales de Mathématiques Pures et Appliquées*):

*Il est donc raisonnablement permis de se demander, d'après cela, si notre manière de diviser la géométrie en géométrie plane et géométrie de l'espace est aussi naturelle et aussi exactement conforme à l'essence des choses que vingt siècles d'habitude ont pu nous le persuader [...].*

Gabriel Alcippe Mahistre, *Les analogies de la Géométrie élémentaire , ou la Géométrie dans l'espace ramenée à la géométrie plane etc.*, Paris, Garnier, e Paris, Hachette, 1844

Anton Bretschneider, *Lehrgebäude der niederen Geometrie. Für den Unterricht an Gymnasien und höheren Realschulen entworfen*, Jena, Fr. Frommann, 1844

Adoloh Steen, *Oversigt over Hovedformerne i Rummet som Inledning til Geometrien*, 1858

Charles Méray, *Nouveaux éléments de géométrie*, Paris, F. Savy , 1874

Il libro di Méray fu adottato in alcune scuole francesi: una sperimentazione fu portata avanti da Chanchenotte, a Digione negli anni dal 1876 al 1878.

- Il fusionismo ebbe poi in Francia un ritorno di interesse a fine secolo, in seguito alle ricerche portate avanti in Italia e principalmente alla pubblicazione del volume di Lazzeri e Bassani.
- Il libro di Méray venne adottato da Billiet, insegnante alla Scuola Normale degli Istitutori di Auxerre, nei due anni scolastici consecutivi dal 1898 al 1900, con risultati estremamente soddisfacenti.
- Nel 1897 alla quarantaquattresima riunione dei filologi e professori tedeschi, a Dresda (Rapporto Rhon) fu riproposta e dibattuta la questione della fusione delle due geometrie piana, e solida.
- Nel 1898 Laisant trattò la questione della fusione in Francia nel libro: ***Mathématiques, Philosophie, Enseignement*** e nel 1899, sulla rivista ***Enseignement Mathématique*** da lui diretta, apparve una recensione del volume di Giulio Lazzeri e Anselmo Bassani e un articolo di Giacomo Candido sulla storia del metodo della fusione della geometria elementare in Italia.
- Altri interventi a favore della fusione furono quelli di Laisant e di Chailan nel 1901. Venne allora rivalutato il libro di Méray, e quindi ristampato nel 1903: l'anno successivo era insegnato in una trentina di scuole francesi.

# Testi di geometria in Italia

Nella prima metà dell'Ottocento il panorama italiano dei testi di geometria elementare era stato dominato dalle traduzioni del trattato di **Legendre**, gli *Éléments de géométrie*, in cui il ricorso all'algebra aveva permesso di eliminare alcune delle teorie più astratte contenute negli *Elementi* di Euclide come la teoria delle proporzioni, talvolta anche a scapito del rigore.

Nel periodo immediatamente precedente e subito dopo l'Unità comparvero traduzioni in italiano di testi di geometria più moderni: di **Amiot**, a cura di **Giovanni Novi**, e di **Richard Baltzer**, a cura di **Luigi Cremona**, in cui la geometria era insegnata senza alcuna contaminazione di tipo algebrico e in cui trovavano posto anche risultati e concetti nuovi tratti dalla geometria proiettiva.

Nelle zone di influenza austriaca buon successo avevano le traduzioni del testo di **Franz Mocnik**, di impostazione tradizionale, con l'aggiunta della trigonometria e della geometria analitica piana.

La forza della tradizione ebbe tuttavia il sopravvento nei programmi ministeriali del 1867 redatti da **Betti e Brioschi**, che rendevano obbligatorio il testo degli *Elementi* di Euclide per l'insegnamento della geometria nei ginnasi e nei licei. Betti e Brioschi firmarono anche l'edizione degli *Elementi* che uscì l'anno seguente con le note di Luigi Cremona, e un'appendice coi risultati archimedei su cilindro, cono e sfera.

Al tentativo di riproporre direttamente il testo euclideo nelle scuole secondarie superiori fecero seguito nuove esposizioni della geometria elementare, sempre di indirizzo purista, curate da alcuni dei maggiori matematici della fine dell'Ottocento. Questi testi, più che da finalità didattiche, erano guidati dalla preoccupazione di mantenere il massimo rigore, poiché gli studi sui fondamenti della geometria avevano messo in rilievo l'incompletezza del sistema di assiomi euclideo.

Il primo di questi trattati fu quello di **Achille Sannia ed Enrico d'Ovidio**, fedele ai modelli classici, con una netta separazione fra planimetria e stereometria, e tra il metodo puramente geometrico e le applicazioni dell'algebra alla geometria, ma con le estensioni di un moderno trattato di geometria elementare. Ebbe moltissime edizioni.

Un altro testo di larga diffusione, con varie edizioni e versioni, per diversi tipi di scuole, fu scritto da **Aureliano Faifofer**.



- **Amiot, *Leçons nouvelles de géométrie élémentaire***, 1<sup>a</sup> ed. Paris, Dezobry, 1850;
- **Giovanni Novi, *Trattato di geometria elementare di A. Amiot. Prima traduzione italiana con note ed aggiunte***, Firenze, Le Monnier, 1858;
- **Richard Baltzer, *Die Elemente der Mathematik***, 1<sup>a</sup> ed. Leipzig, Hirzel, 1853;
- **Luigi Cremona, *Elementi di matematica***, Genova, Tip. R. I. Sordo-Muti, 1865, in sei volumi corrispondenti alle sei parti del trattato di Baltzer che si estende a tutte le matematiche elementari, con molte note storico-critiche.
- **Franz Mocnik, *Corso di geometria ad uso dei ginnasi superiori***, traduzione fatta sulla seconda edizione, Vienna, s.n.t., 1857.
- **Enrico Betti, Francesco Brioschi, *Elementi d'Euclide***, 1<sup>a</sup> ed., Firenze, Le Monnier, 1868.
- **A. Sannia, E. d'Ovidio, *Elementi di Geometria***, 1<sup>a</sup> ed. Napoli, Tip. Belle Arti, 1869 (2<sup>a</sup> ed. Napoli, Trani, 1871).
- **A. Faifofer, *Elementi di geometria***, 1<sup>a</sup> ed. Venezia, Tip. Emiliana, 1878; *Elementi di geometria ad uso dei licei e degli istituti tecnici*, Venezia, Tip. Emiliana, 1883.

# Il fusionismo in Italia

- L'origine in Italia del fenomeno del fusionismo è più tarda, e risale alla pubblicazione nel 1884 del trattato di Riccardo de Paolis
- **1884. Riccardo De Paolis, *Elementi dei Geometria*, Loescher, Torino.**  
Diviso in sei libri: **I.** Verità fondamentali. **II.** Le figure fondamentali della geometria. **III.** Cerchio, cono, cilindro, Sfera. **IV.** Teoria dell'eguaglianza. **V.** Teoria della proporzionalità. **VI.** Teoria della misura.
- **1891. Giulio Lazzeri, Anselmo Bassani, *Elementi di Geometria*, Giusti, Livorno.**

Adottato in molti licei, ebbe una seconda edizione nel 1898.

Diviso in cinque libri: **I.** Retta e piano. Segmenti, angoli e diedri. Prime nozioni sul circolo e sulla sfera. Rette parallele, rette e piani paralleli. **II.** Poligoni, angoloidi, poliedri.

Distanze. **III.** Relazioni fra rette, piani e sfere. Relazioni di poligoni con un circolo e di poliedri con una sfera, Superfici e solidi di rotazione. **IV.** Teoria generale dell'equivalenza. Equivalenza di poligoni e superfici poliedriche; di poligoni sferici e di piramidi sferiche; dei prismi. Grandezze limite. Equivalenza dei poliedri: Equivalenza del circolo e dei corpi rotondi. **V.** Teoria delle proporzioni. Figure simili. Misure. Applicazione dell'Algebra alla Geometria.

# Fusionisti e separatisti

## Testi fusionisti

Angelo Andriani, *Elementi di geometria euclidea esposti con nuovo metodo*, Napoli, Pellerano, 1887, 1894.

Giuseppe Zaccaria Reggio, *Complementi di geometria*, Zoppelli, Treviso, 1891, 1898

Giuseppe Ingrams, *Elementi di geometria*, Cuppini, Bologna, 1899, 1904

## Testi separatisti

Giuseppe Veronese, *Elementi di Geometria*, Federigo Enriques e Ugo Amaldi, *Elementi di geometria*, 1903; il più celebre, di chiara impostazione hilbertiana

## Testi di tipo misto, che consentivano di alternare gli argomenti

Achille Sannia ed Enrico D'Ovidio, *Elementi di geometria*, Pellerano, Napoli, 1888

Giuseppe Veronese, *Elementi di geometria*, Drucker, Padova, 1897

Michele De Franchis, *Geometria elementare ad uso dei licei, dei ginnasi superiori e delle scuole tecniche*, Sandron, Palermo, 1909, 1911

## Sperimentazioni del metodo fusionista:

- **1886-87.** Prof. Giudice, Regio Liceo di Palermo, adottando il testo di De Paolis.
- **1892-93 e 1898-99.** Prof. Murer, 1<sup>a</sup> classe del Liceo, seguendo il testo di Lazzeri e Bassani
- **1896-98.** Prof. Scorza, 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> classe del biennio, nell'Istituto Tecnico di Reggio Emilia, seguendo il testo di Faifofer (di tipo misto).

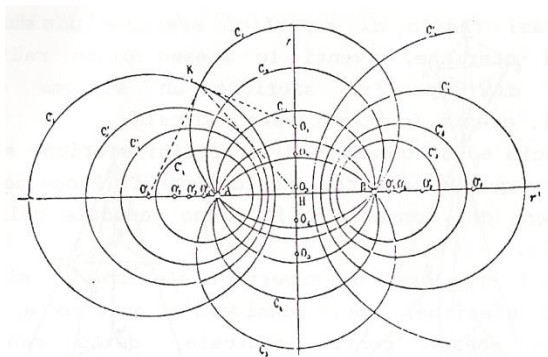
# La teoria degli assi radicali

I teoremi sui cerchi, come ad esempio i seguenti:

“Il luogo dei punti di un piano, tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due cerchi, non concentrici, siano uguali, è la parte di una retta perpendicolare alla retta dei centri dei due cerchi, esterna ai cerchi dati”.

“Dati due cerchi in un piano non concentrici:

- 1) Esistono infiniti cerchi che, presi a due a due, hanno per asse radicale la retta dei centri dei due cerchi dati; il luogo dei loro centri è l'asse radicale dei due cerchi dati.
- 2) Esistono infiniti cerchi che, presi a due a due, hanno per asse radicale quello dei due cerchi dati; il luogo dei loro centri è la retta dei centri dei cerchi dati.”



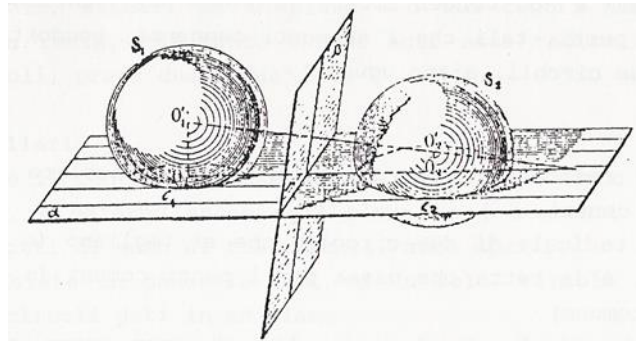
# La teoria degli assi radicali

sono fatti seguire, o messi in parallelo, coi rispettivi teoremi sulle sfere:

“Il luogo dei punti tali che i segmenti tangenti condotti da essi a due sfere uguali siano uguali, è la parte, esterna alle due sfere, del piano perpendicolare al segmento congiungente i centri, nel suo punto di mezzo.”

“Date due superfici sferiche non concentriche:

- 1) Esistono infinite superfici sferiche che, prese a tre a tre, hanno per asse radicale la retta dei centri delle due sfere date; il luogo dei loro centri fa parte del piano radicale delle due superfici sferiche date.
- 2) Esistono infinite superfici sferiche che, prese a due a due, hanno per piano radicale quello delle due superfici sferiche date; il luogo dei loro centri fa parte della retta dei centri delle due sfere date.”

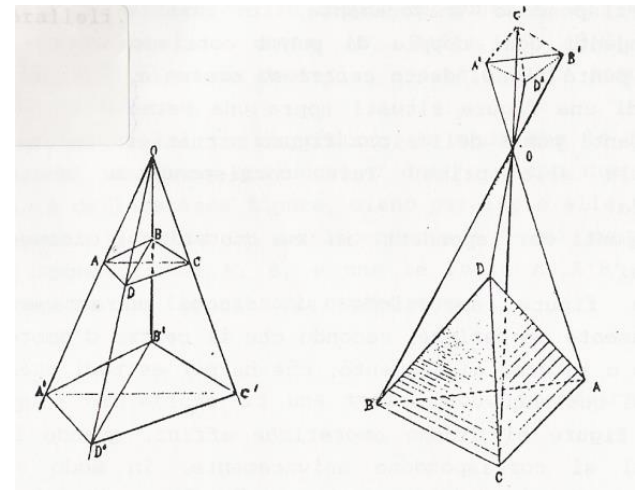


# La teoria delle figure omotetiche

È un'altra teoria che arricchisce la geometria elementare di nuovi risultati. La fusione di geometria piana e solida consente anche in questo caso di svincolare la trattazione di questa teoria da ogni considerazione di proporzioni fra grandezze. Nel trattato di De Paolis, come pure in quello di Lazzeri e Bassani, ricopre un ruolo fondamentale il teorema:

**“Se due triangoli si corrispondono, in modo che le tre rette congiungenti i vertici corrispondenti concorrano in un punto, e che due lati dell'uno siano paralleli ai corrispondenti lati dell'altro, anche i due lati rimanenti sono paralleli.”**

che viene dimostrato facilmente con considerazioni stereometriche, senza l'uso della teoria delle proporzioni.

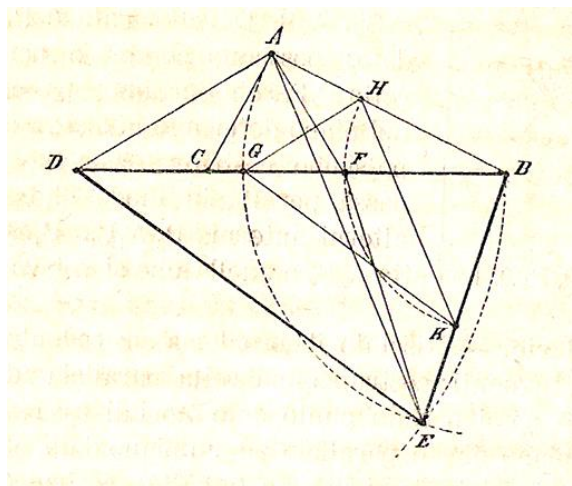


Segue quindi la definizione di figure omotetiche, direttamente o inversamente e le proprietà delle figure omotetiche, della relazione di omotetia e delle possibili omotetie di due figure.

Dalla teoria delle figure omotetiche si costruisce una teoria della similitudine, indipendente dalla teoria delle proporzioni.

Questo teorema è pure alla base della **teoria dei poligoni regolari**. La costruzione infatti dei poligoni regolari di 5, 10, 20, ... lati, e quindi anche di 15, 30, 60, ... lati, si basa, come in Euclide (IV, 10-12), sulla **costruzione di un triangolo isoscele in cui gli angoli uguali sono doppi del terzo angolo**.

Mentre però Euclide utilizza la sezione aurea, De Paolis fornisce una elegante costruzione basandosi sul precedente teorema dei triangoli omotetici, svincolata dalla teoria delle proporzioni ed anche dalla teoria dell'equivalenza (come ad esempio nel libro di Sannia e D'Ovidio).



# Fusionisti e separatisti: il dibattito in seno alla Mathesis

Nel 1896 (1° luglio) sorse in Italia tra gli insegnanti di matematica delle scuole secondarie l'associazione **Mathesis**, che aveva come scopo il miglioramento della scuola e il perfezionamento degli insegnanti, attraverso la promozione della ricerca scientifica e didattica in relazione all'insegnamento della matematica

L'associazione Mathesis, tramite il suo presidente ed il Comitato direttivo, operava proponendo varie questioni riguardanti la didattica della matematica ed anche il suo ordinamento, in particolare le materie ed i programmi di insegnamento relativi ai vari ordini di scuole secondarie. Queste venivano discusse dai soci in adunanze e congressi ed erano oggetto di interventi pubblicati sul ***Bollettino della Associazione Mathesis*** o sul ***Periodico di Matematica***.

In particolare molto spazio ebbe il dibattito sull'insegnamento della geometria nell'ambito di una radicale riforma dei programmi governativi proposta negli anni 1897-98

Tra le questioni che nei primi numeri del Bollettino venivano sottoposte ai soci, e più generalmente alla comunità degli insegnanti di matematica, ricordiamo le seguenti, due delle quali erano dedicate esplicitamente al metodo della fusione



**V. Opportunità della fusione della geometria piana con la solida nell'insegnamento;**  
**VII. Del miglior modo di trattare in iscuola la teoria dell'equivalenza;**  
**X. Dato che debba lasciarsi agli insegnanti libera scelta tra il metodo della fusione e quello della separazione della geometria piana e solida, formulare programmi secondo i quali tale scelta sia possibile.**

Tra il 1897 e il 1798 dunque il tema della fusione fu uno dei più dibattuti nelle adunanze della Associazione Mathesis:

- 1897 Diverse adunanze parziali: a Torino (28 Febbraio), a Palermo (14, 17, 21 e 26 febbraio), a Firenze (5 maggio)
- 1898. Adunanze parziali di Torino (21 e 22 febbraio), Sondrio (14 marzo), Milano (3 aprile), Bologna (3 aprile), Sassari (7 aprile), Recanati (28 e 29 giugno).
- I risultati vennero riassunti e coordinati nel **Primo Congresso** generale di Torino (9-14 settembre 1898). Rodolfo Bettazzi redasse a nome dell'Associazione un memoriale per il Ministro della Pubblica Istruzione (13 Maggio). All'unanimità fu proclamata la necessità di modificare i programmi per consentire la libertà di scelta. Fu anche precisato ciò che si intendeva per fusionismo: non semplicemente la presentazione alternata, ma la trattazione simultanea di argomenti affini di geometria piana e solida

Fu proposta quindi la seguente distribuzione della materia, che permetteva la libera scelta fra i due metodi:

- nei licei al primo anno le proprietà di posizione e di uguaglianza, al secondo le teorie dell'equivalenza e della similitudine, al terzo la teoria della misura e la trigonometria piana;
- negli istituti tecnici al primo anno le proprietà di posizione e di uguaglianza (ossia le proprietà *affini* e la teoria della congruenza), al secondo le teorie dell'equivalenza, della similitudine e della misura, al terzo la trigonometria e le questioni complementari.

In realtà la proposta non fu votata e fu rimandata ad un esame globale della più generale proposta di riforma dei programmi portata avanti da Antonio Maria Bustelli.

Molte delle proposte nate nell'ambito della Mathesis furono recepite dal **decreto del ministro Gallo del 24 ottobre 1900**, ed in particolare quella di programmi di geometria che permettessero di scegliere tra il metodo fusionista e quello separatista.

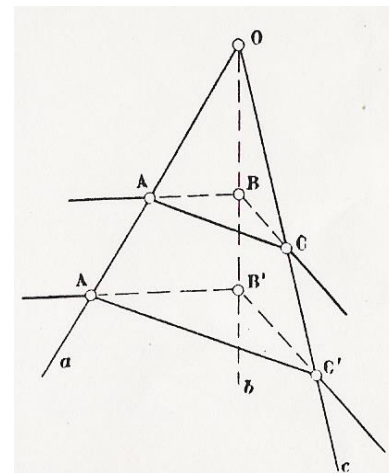
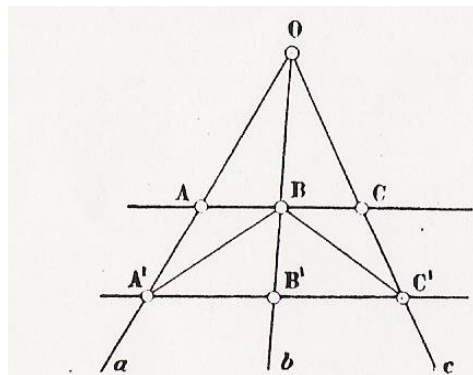
Quattro anni dopo, una **valutazione della sperimentazione del metodo fusionista** fu avviata da Rodolfo Bettazzi i cui risultati furono pubblicati sul *Bollettino* e a proposito della quale Giulio Lazzeri intervenne nuovamente sul *Periodico di Matematica*.

Il 2 gennaio 1904 venne inviata una circolare a tutti i professori di liceo del Regno con la domanda se la fusione della geometria piana colla solida fosse utile nell'insegnamento. Risposero 66 professori, di cui 28 si dichiaravano favorevoli, e 33 contrari.

# Fusionisti e separatisti: il dibattito in seno alla Mathesis

- Le obiezioni alla fusione riguardarono essenzialmente gli **inconvenienti didattici** derivanti dalla difficoltà dei giovani studenti nel concepire una intuizione spaziale, anche per la mancanza di modelli adeguati (così si pronunciava ad esempio Giuseppe Sforza), la **mancata gradualità** nel passare da argomenti più semplici a più complessi, **il ritardo nella esposizione di teorie**, come quella della misura, necessaria per le applicazioni dell'algebra alla geometria.
- A queste obiezioni i sostenitori del fusionismo opponevano considerazioni ugualmente opinabili, come **l'immediatezza e la naturalezza della visione spaziale**, la riduzione della fatica dello studio per **l'eliminazione di ripetizioni** di teoremi analoghi per il piano e lo spazio, **la breve sperimentazione del metodo fusionista** a fronte dei duemila anni di studi ed esperienze in ambito separatista, e così via.
- Ma l'ambizione che realmente sottendeva la scelta fusionista era quella di **rendere più semplice e rigorosa l'esposizione della geometria elementare**, rendendo esplicita la dipendenza dagli assiomi delle diverse teorie che alla geometria appartengono, e di **attualizzare l'insegnamento secondario** introducendo nuovi concetti e risultati della ricerca geometrica recente.
- Tra i principali sostenitori del fusionismo ricordiamo, oltre a Rodolfo Bettazzi, Enrico de Amicis, Francesco Giudice, Giovanni Frattini, Giacomo Candido, Gino Loria.

“Se  $a, b, c$  sono tre semirette complanari uscenti da uno stesso punto  $O$  ed incontranti rispettivamente due rette parallele nei punti  $A$  e  $A', B$  e  $B', C$  e  $C'$  in modo che  $AB = BC$ , dimostrare che  $A'B' = B'C'$ ”



Questa proposizione, che nell'enunciato contiene solo concetti delle teorie del parallelismo e della congruenza, si può dimostrare sia ricorrendo alla teoria delle proporzioni, che a quella dell'equivalenza, che a considerazioni stereometriche.

Basandosi sulla teoria delle proporzioni si ha infatti subito:

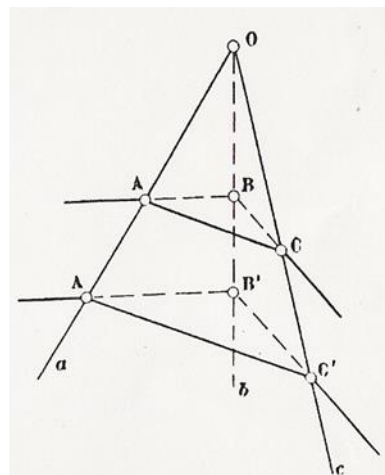
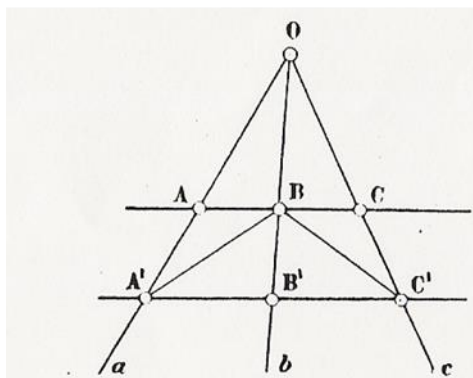
$$A'B' : AB = OB' : OB = B'C' : BC \quad \text{da cui} \quad A'B' : AB = B'C' : BC$$

e, da  $AB = BC$ , segue  $A'B' = B'C'$ .

Oppure: dalla equivalenza dei triangoli  $OAB$  e  $OBC$  (che hanno basi uguali e uguale altezza) e dalla equivalenza dei triangoli  $A'AB$  e  $C'CB$  si può dedurre l'equivalenza dei triangoli  $OBA'$  e  $OBC'$ . Avendo questi la medesima base  $OB$ , sono uguali le rispettive altezze, che sono anche altezze dei triangoli  $BB'A'$  e  $BB'C'$ , i quali sono pure equivalenti avendo la medesima base  $BB'$ . Ma essi possono anche considerarsi aventi le basi  $A'B'$  e  $B'C'$  e corrispondentemente la medesima altezza, per cui queste basi devono essere uguali ossia  $A'B' = B'C'$ .

Oppure, infine, facendo ruotare il semipiano  $OBC$  attorno alla retta  $OB$  di un angolo minore di  $180^\circ$ , e congiungendo  $A$  con  $C$  e  $A'$  con  $C'$ , essendo  $BA$  parallela a  $B'A'$  e  $BC$  parallela a  $B'C'$ , il piano  $ABC$  è parallelo al piano  $A'B'C'$  e perciò sono parallele le loro intersezioni  $AC$  e  $A'C'$  col piano delle semirette  $a$  e  $c$ . Pertanto  $BAC = B'A'C'$  e  $ACB = A'C'B'$  ma  $AB = BC$  e perciò  $BAC = ACB$ , da cui  $B'A'C' = A'C'B'$  e infine quindi  $A'B' = B'C'$ .

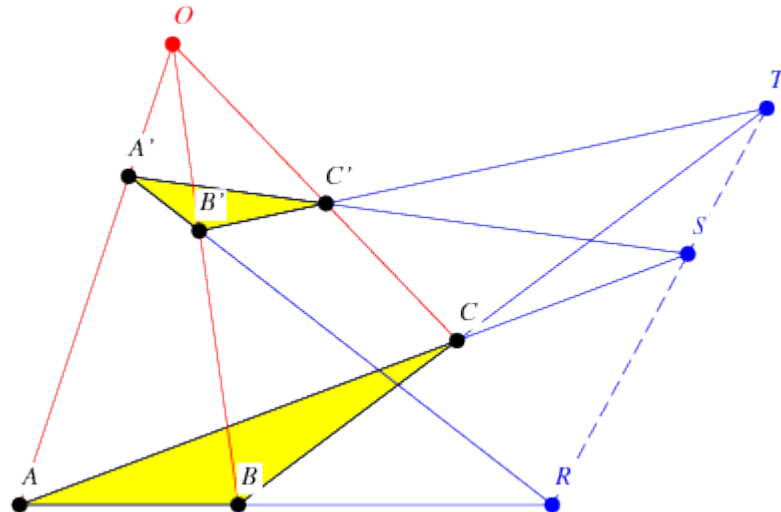
In quest'ultimo caso non intervengono nella dimostrazione se non considerazioni relative al parallelismo e alla congruenza.



# Il ruolo del teorema di Desargues

Tutte le questioni e le teorie, in cui il metodo fusionista era più diretto, permettendo di dimostrare teoremi e proprietà proiettive senza fare uso delle proprietà metriche o collegate alla congruenza, si possono ricondurre al [teorema di Desargues sui triangoli omologici](#):

“Se in due triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$ , i vertici omologhi concorrono in un punto  $O$  (proprio o all'infinito) le rette dei lati omologhi si incontrano in punti allineati, e viceversa.”



Una spiegazione si trova nella memoria di **Peano** *Sui fondamenti della geometria* (1894), dove Peano costruisce la geometria di posizione (come allora si chiamava quella parte della geometria elementare che riguarda esclusivamente le relazioni di associazione e ordinamento) sui concetti primitivi di punto e segmento e dimostra in particolare che

**il teorema dei triangoli omologici nel piano è conseguenza del postulato spaziale: “Dato un piano, si può segnare un punto fuori di esso”, ed anche che questo è necessario per dimostrare il teorema di Desargues.**

Un chiarimento ulteriore della questione si trova nei *Fondamenti della Geometria* di Hilbert (1899).

Dopo aver posto gli assiomi della geometria elementare su tre concetti primitivi (punto, retta, piano) e secondo cinque gruppi, I di appartenenza, II ordine, III congruenza, IV delle parallele, V continuità, Hilbert dimostrava che:

**“C’è una geometria piana nella quale sono soddisfatti tutti gli assiomi lineari e piani, ad eccezione dell’assioma III.5 (quinto assioma di congruenza), mentre non vale il teorema di Desargues.**

***In una geometria piana in cui siano soddisfatti gli assiomi dei gruppi I, II e IV\* (ossia l’assioma delle parallele nella forma forte: per un punto esterno esiste una ed una sola parallela ad una retta data), la validità del teorema di Desargues è condizione necessaria e sufficiente affinché questa geometria possa venire considerata come una parte di una geometria dello spazio in cui siano soddisfatti tutti gli assiomi I, II, IV\*.”***

In altri termini:

**il teorema di Desargues nel piano, pur coinvolgendo proprietà solo affini, non legate alla congruenza, non può essere dedotto senza gli assiomi citati, ossia per la sua dimostrazione occorrono necessariamente o gli assiomi dello spazio o l'assioma della congruenza dei triangoli.**

**Il teorema di Desargues si caratterizza per la geometria piana come il risultato della eliminazione degli assiomi dello spazio.**



# Conclusioni

- Le successive vicende della questione fusionista si stemperano dopo il 1904 nelle più gravi e generali questioni che agitarono la comunità degli insegnanti di matematica.
- Nel **1904** una nuova riforma dei programmi dell'istruzione classica avvenuta col Decreto Orlando, consentiva agli studenti che avessero ottenuto la promozione nella seconda classe liceale di optare nei corsi successivi tra l'insegnamento del greco e quello della matematica. I programmi permettevano ancora di scegliere tra i due metodi di insegnamento della geometria. Le proteste e le reazioni furono vivaci nell'ambito della Mathesis.
- Nel **1906**, in previsione di una riforma generale dell'insegnamento della scuola media (divisa in due quadrienni: primario e secondario) la Commissione Reale, di cui facevano parte Blaserna e Vailati, sottoponeva un *Questionario* a tutto il corpo insegnante, alle facoltà universitarie, alle associazioni e ai corpi scientifici e letterari. Per quanto riguarda la matematica, troviamo ancora al punto ottavo la richiesta di dare una **opinione sulla opportunità della fusione della geometria piana con la solida**.
- Ancora negli anni **1910-11** Alessandro Padoa, allievo di Peano, presentava un progetto di riforma della scuola media, in cui per l'insegnamento della geometria nel corso avanzato, proponeva **un metodo fusionista**

# Conclusioni

- La polemica sul fusionismo si esauriva dopo i primi decenni del nuovo secolo con il tacito ritorno alla separazione tra la geometria piana e quella solida.
- Concludendo, possiamo dire che **il dibattito sul fusionismo contribuì alla chiarificazione dei legami esistenti tra i postulati e le teorie facenti parte della geometria elementare.**
- La questione del fusionismo mette anche in luce con grande evidenza come **gli indirizzi della didattica della matematica siano stati strettamente legati agli sviluppi della ricerca:** quando la geometria descrittiva smette di interessare i geometri e le ricerche sui fondamenti della geometria elementare possono considerarsi conclusi, finiscono anche le discussioni sul fusionismo.

# Bibliografia

- M. T. Borgato (2006), «Il fusionismo e i fondamenti della geometria», in: Giacardi L. (a cura di), *Da Casati a Gentile, momenti di storia dell'insegnamento secondario...*, pp. 125-157, Lugano, Agorà publishing, Lumières Internationales
- G. Candido (1899), «Sur la fusion de la planimétrie et de la stéréométrie dans l'enseignement de la géométrie élémentaire en Italie», *Enseignement Mathématique*, I, pp. 204-215
- E. Ulivi (1977), «Una moda didattica in matematica, il fusionismo», *Archimede*, 29, pp. 212-216
- C.-A. Laisant (1901), «Une exhumation géométrique», *Enseignement Mathématique*, III, n. 2, pp. 98-105
- E. Chailan (1901), «Un progrès mathématique à réaliser», *Enseignement Chrétien*, 1 marzo
- (1901) «La fusione della planimetria e della stereometria in Francia», *Bollettino dell'Associazione Mathesis*, a. V, n. 1, pp. 42-48
- C. Méray (1904), «Justification des procédés et de l'ordonnance des Nouveaux éléments de géométrie», *Enseignement Mathématique*, VI, n.2, pp. 89-123
- D. Hilbert (1899), *Grundlagen der Geometrie*, traduzione italiana *Fondamenti della geometria*, Milano, Feltrinelli, 1970, cap. V, pp. 85-104
- G. Peano (1894), «Sui fondamenti della geometria», *Rivista di Matematica*, 4, pp. 51-90, cfr. p. 73. *Opere scelte*, vol. III, Roma, Cremonese, 1959, pp. 115-157 (cfr. p. 139)