

**Dalla geometria piana alla solida o viceversa?  
lo "stato dell'arte" alle scuole superiori**

Agorà Matematico  
5 Marzo 2014  
Isabella Stevani – Daniela Gambi

# *La realtà e ... la geometria*

*“La matematica in generale e la geometria in particolare debbono la loro esistenza al nostro bisogno di sapere qualcosa circa il comportamento degli oggetti reali.”*

[A. Einstein, La geometria e l'esperienza]

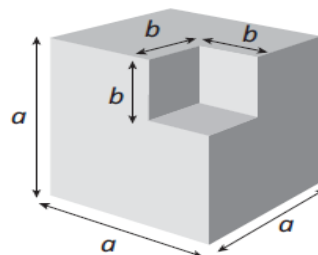
*«La Geometria può essere significativa solo se esprime le sue relazioni con lo spazio dell'esperienza... essa è una delle migliori opportunità per matematizzare la realtà».*

[Freudenthal cit. in Speranza (1988)]

# Dall'Esame di Stato della Terza Media ...



D2. In figura è rappresentato un solido ottenuto da un cubo grande dal quale è stato tolto un cubo più piccolo.



- A. ☐  $6a^2 - 3b^2$
- B. ☐  $3a^2 - 3b^2$
- C. ☐  $(a - b)^3$
- D. ☐  $a^3 - b^3$

Quale delle seguenti espressioni permette di calcolare il volume del solido ottenuto?

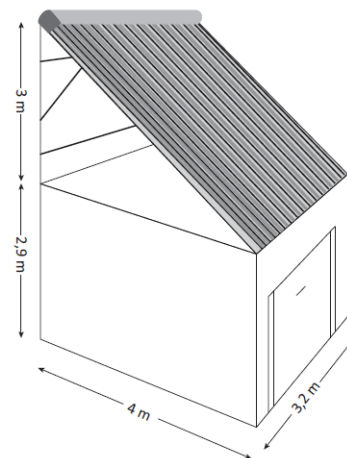
D3. Marco vuole installare dei pannelli solari sul tetto del suo box auto.

La superficie su cui poggeranno i pannelli deve essere inclinata per ricevere i raggi del sole nel modo più efficace.

Il progetto di Marco è schematizzato nella figura.

La superficie che ospiterà i pannelli solari misura

- A. ☐  $12 \text{ m}^2$
- B. ☐  $12,8 \text{ m}^2$
- C. ☐  $16 \text{ m}^2$
- D. ☐  $16,4 \text{ m}^2$



# *Nel passaggio dalla scuola media alle superiori ... i solidi scompaiono*

La geometria solida svolge un ruolo significativo nel percorso didattico dell'ultimo anno della scuola media, contrariamente a quanto avviene nel biennio della scuola secondaria di secondo grado.





# *La geometria dalle indicazioni “forti” del primo biennio*

- ... conoscenza dei fondamenti della geometria euclidea del piano
- ... importanza e il significato dei concetti di postulato, assioma, definizione, teorema, dimostrazione, ...
- ... . In coerenza con il modo con cui si è presentato storicamente, l'approccio euclideo non sarà ridotto a una formulazione puramente assiomatica.
- ... aspetti geometrici e le implicazioni nella teoria dei numeri del teorema di Pitagora
- ... principali trasformazioni geometriche e loro invarianti (traslazioni, rotazioni, simmetrie, similitudini con particolare riguardo al teorema di Talete)
- ... le proprietà fondamentali della circonferenza

# Alla fine del biennio: i solidi a volte ritornano, ma ... chi si ricorda?



Ministero dell'Istruzione  
dell'Università e della Ricerca



INVALSI  
Istituto nazionale per la valutazione  
del sistema educativo di istruzione e di formazione

Rilevazione degli apprendimenti

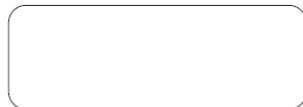
Anno Scolastico 2012 - 2013

## PROVA DI MATEMATICA

*Scuola secondaria di II grado*

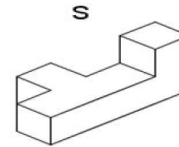
Classe Seconda

Fascicolo 1



Spazio per l'etichetta autoadesiva

D10. Se il solido S viene fatto ruotare,



quale tra le seguenti configurazioni non può assumere?

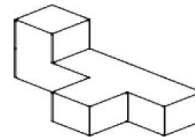


Figura 1

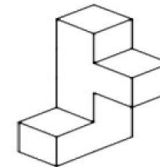


Figura 2

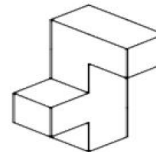


Figura 3

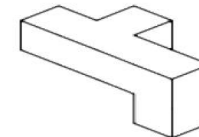
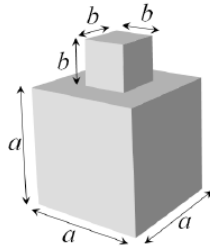


Figura 4

- A. ☐ Figura 1
- B. ☐ Figura 2
- C. ☐ Figura 3
- D. ☐ Figura 4

# Alla fine del biennio: i solidi a volte ritornano, ma ... chi si ricorda?

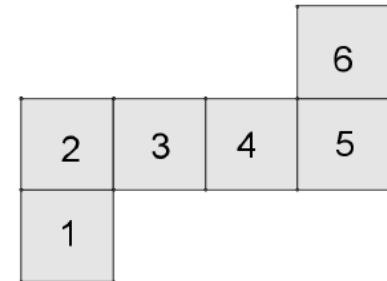
D23. Un solido  $S$  è ottenuto incollando uno sopra l'altro due cubi come mostra la seguente figura:



Quale delle seguenti espressioni esprime l'area della superficie totale del solido  $S$ ?

- A. ☐  $5a^2 + 4b^2$
- B. ☐  $6a^2 + 4b^2$
- C. ☐  $6a^2 + 5b^2$
- D. ☐  $6a^2 + 6b^2$

D32. La seguente figura rappresenta uno sviluppo piano di un cubo.



Quale tra le seguenti coppie è formata da facce opposte del cubo?

- A. ☐ 1 e 4
- B. ☐ 2 e 5
- C. ☐ 3 e 5
- D. ☐ 4 e 6

# ***Biennio: dalle indicazioni alla prassi, i possibili approcci alla geometria solida...***

- Durante il ***primo anno***, i riferimenti alla geometria 3D sono possibili a partire dalla *geometria piana* (si lavora con le figure e con le loro trasformazioni con particolare riferimento alle simmetrie ... che possono poi portare all'introduzione delle figure solide e delle loro simmetrie ...); col *calcolo letterale* (cubo del binomio ...) o in un contesto pluridisciplinare, in relazione, ad esempio, agli argomenti trattati in *fisica*: sistemi di riferimento spaziali nello studio dei moti o in *scienze e geografia* ...
- Durante il ***secondo anno***, la geometria solida si riaffaccia attraverso l'introduzione delle *coniche* (sezioni di coni ...), la geometria analitica con l'interpretazione grafica di *sistemi lineari* di 3 equazioni in 3 incognite, ma può essere coinvolta anche nello studio *dell'ottica* (*ombre, proporzionalità, proiezioni*)



# *Geometria: le indicazioni “forti” del secondo biennio e del quinto anno*

Le sezioni coniche saranno studiate sia da un punto di vista geometrico sintetico che analitico. Inoltre, lo studente approfondirà la comprensione della specificità dei due approcci (sintetico e analitico) allo studio della geometria.

Studierà le proprietà della circonferenza e del cerchio e il problema della determinazione dell'area del cerchio, nonché la nozione di luogo geometrico, con alcuni esempi significativi.

Lo studio della geometria proseguirà con l'estensione allo spazio di alcuni dei temi della geometria piana, anche al fine di sviluppare l'intuizione geometrica. In particolare, saranno studiate le posizioni reciproche di rette e piani nello spazio, il parallelismo e la perpendicolarità, nonché le proprietà dei principali solidi geometrici (in particolare dei poliedri e dei solidi di rotazione).

L'introduzione delle coordinate cartesiane nello spazio permetterà allo studente di studiare dal punto di vista analitico rette, piani e sfere.

# *Triennio: dalla geometria piana a quella solida, tra Euclide e Cartesio*

- La classe **terza** è un anno “preparatorio”, in cui si approfondisce l’ambiente della *geometria cartesiana* e si rafforzano le competenze di *calcolo algebrico* (la “cassetta degli attrezzi” si arricchisce di nuovi strumenti ...)
- **L’ultimo biennio** vede la geometria solida fare di nuovo capolino con una *sistematizzazione assiomatica* in continuità con il biennio, dal punto di vista “euclideo” per sfociare nelle *geometrie non euclidee*, ma si struttura anche in ambiente “cartesiano” e metrico, in particolare attraverso le *trasformazioni geometriche* (affinità in prevalenza), *problemi di massimo e minimo* e il *calcolo integrale* (calcolo di aree di superficie di solidi di vario tipo, volumi solidi di rotazione,..., integrazione numerica...)

# ***Biennio: esempi di percorsi didattici***

## ***«Dalle figure piane a ...»***

### **Percorso in una classe prima di indirizzo linguistico**

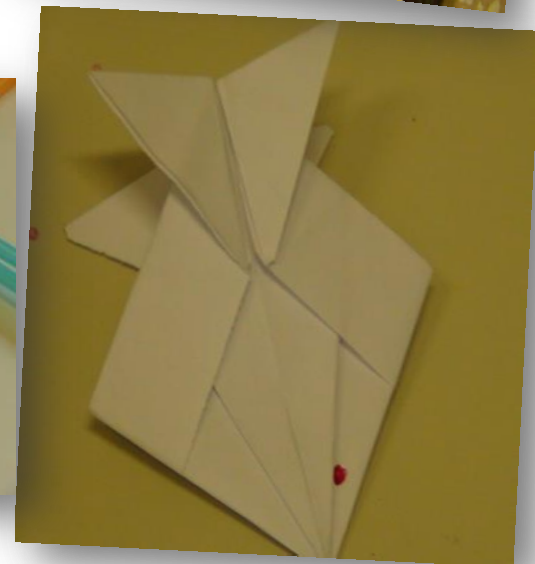
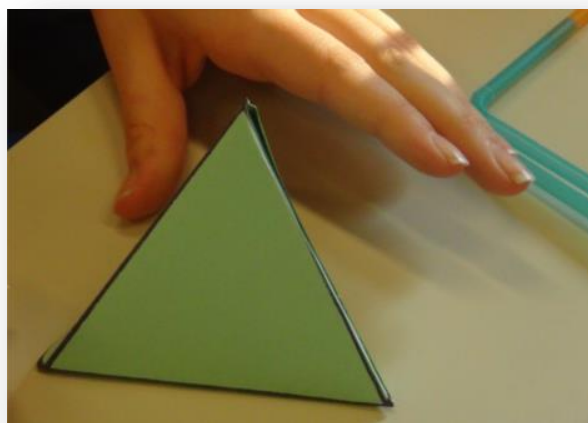
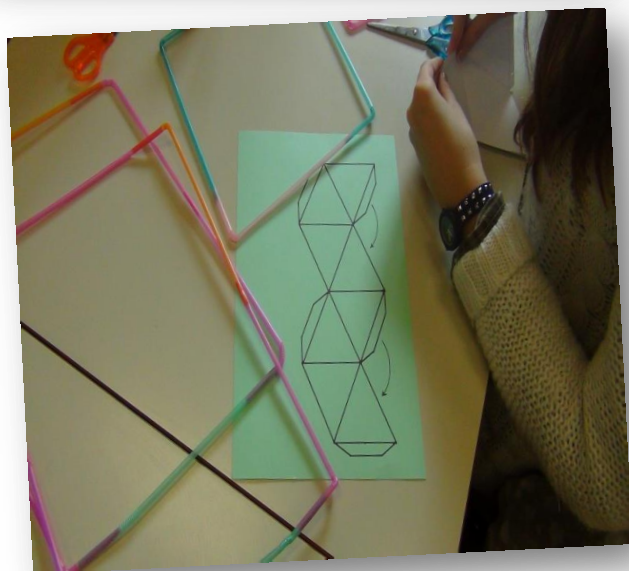
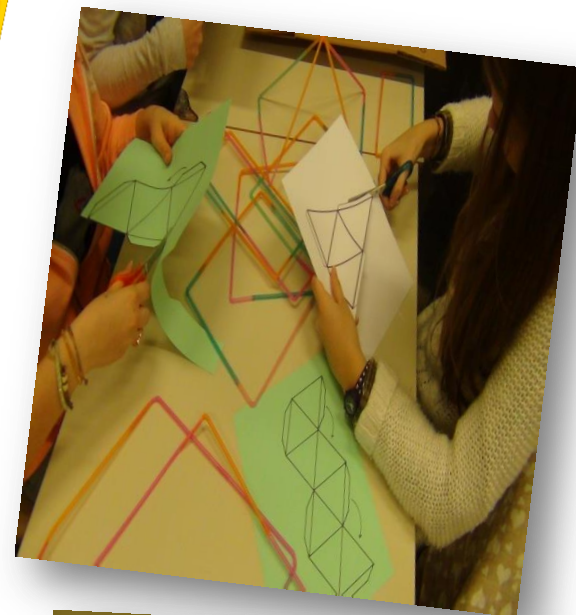
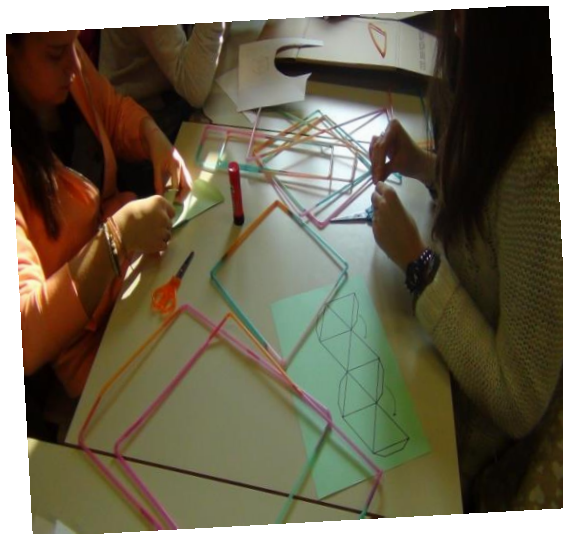
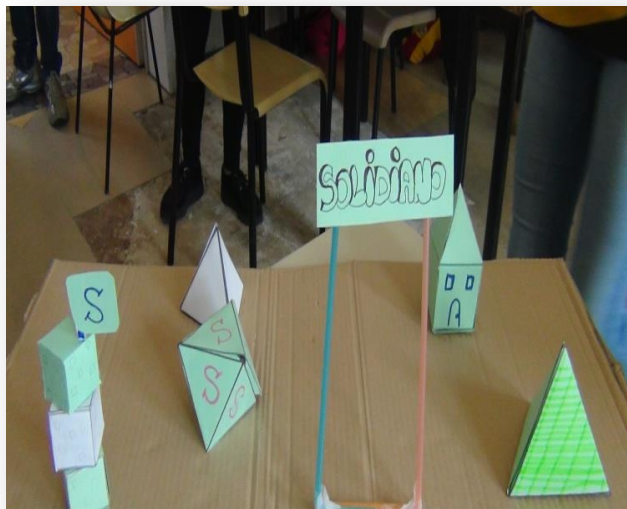
Lavori di gruppo

- **Le figure piane si raccontano** (le figure personificate raccontano le loro caratteristiche)
- **A caccia di figure piane** (le figure piane attorno a noi)
- **Lo scoiattolo insegna** (scoiattolo narrante della drammatizzazione del capitolo del "*Mago dei Numeri*" ...)
- **"Flatlandia"**: lettura di alcuni passi e drammatizzazione
- **Le figure piane si ribellano** ... escono dal piano e si uniscono per costruire la città "Solidiano" fatta di solidi "ben fatti e non" e popolata di animali ottenuti con gli origami



# *Percorso "Dalle figure piane a ..."*

## *Alcune immagini*





# Percorsi didattici innovativi?!



*Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca  
Dipartimento per l'Istruzione*

## Progetto "m@t.abel"

Matematica. Apprendimenti di base con e-learning



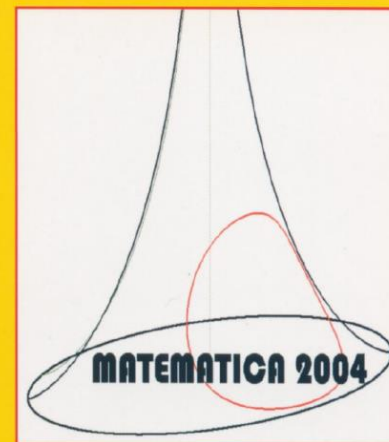
Ministero  
dell'Istruzione,  
dell'Università  
e della Ricerca

Direzione  
Generale  
Ordinamenti  
Scolastici

Unione  
Matematica  
Italiana

Società Italiana  
di Statistica

Liceo Scientifico  
Statale  
"G. Ricci Curbastro"  
Lugo di Romagna  
(Ravenna)



## La Matematica per il cittadino

Attività didattiche e prove  
di verifica per un nuovo  
curricolo di matematica

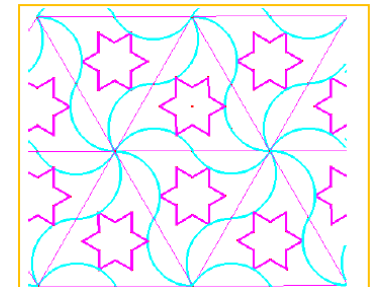
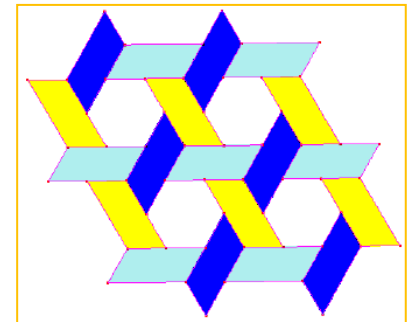
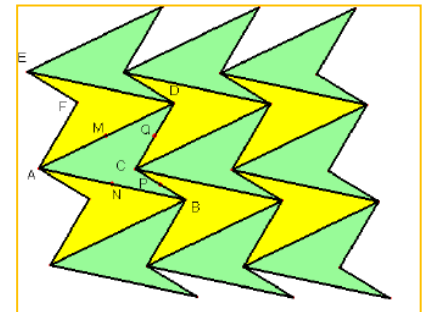
Quinta classe  
del ciclo secondario  
di secondo grado

# Percorso m@t.abel

## Tassellazioni nel piano

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.	Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	<u>Spazio e figure</u>	Storia dell'arte Disegno Scienze
Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano.	Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà.	Argomentare, congetturare e dimostrare	
Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie	Ampiezza degli angoli.	Misurare	
		Risolvere e porsi problemi	
		Laboratorio di matematica	



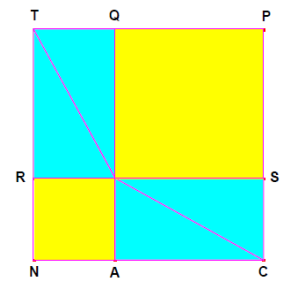
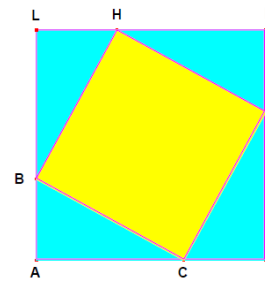
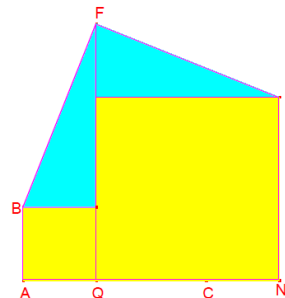
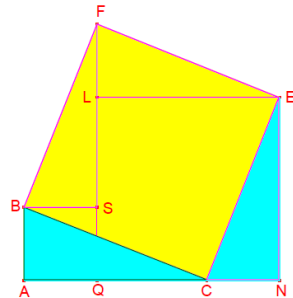
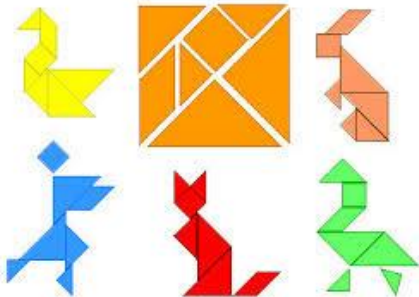
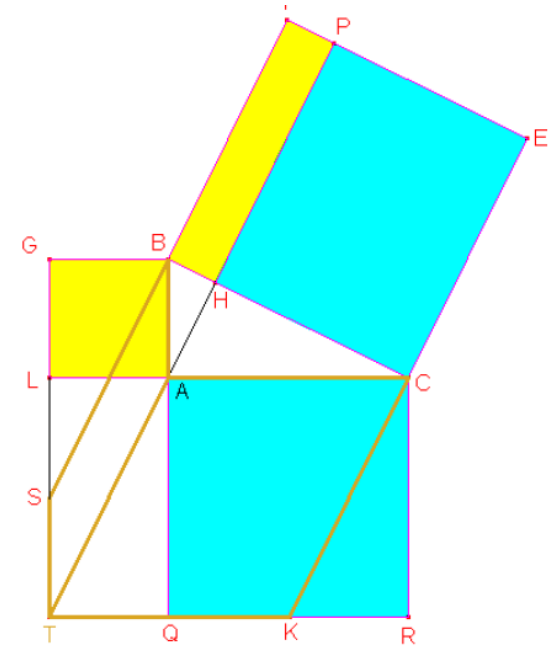
# Percorso m@t.abel

## Il teorema di Pitagora ....

### Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia

Livello scolastico: 1° biennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.</p> <p>Verificare una congettura in casi particolari con consapevolezza della distinzione tra verifica e dimostrazione.</p> <p>Produrre congetture e sostenerle con ragionamenti coerenti e pertinenti.</p>	<p>Equivalenza nel piano ed equiscomponibilità tra poligoni.</p> <p>Teoremi di Euclide e di Pitagora.</p>	<p><u>Spazio e figure</u></p> <p>Argomentare, congetturare, dimostrare</p>	<p>Storia</p>

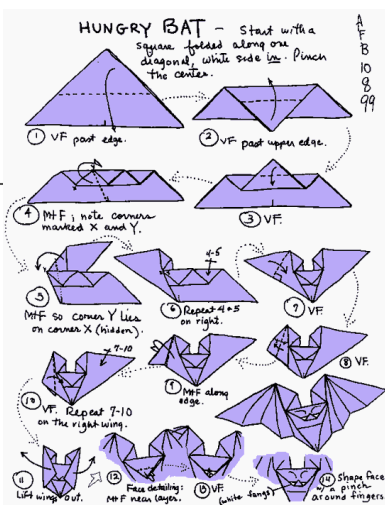


# Percorso m@t.abel

## Origami, riga e compasso ...

Origami, riga e compasso, software geometrico

Livello scolastico: 1° biennio

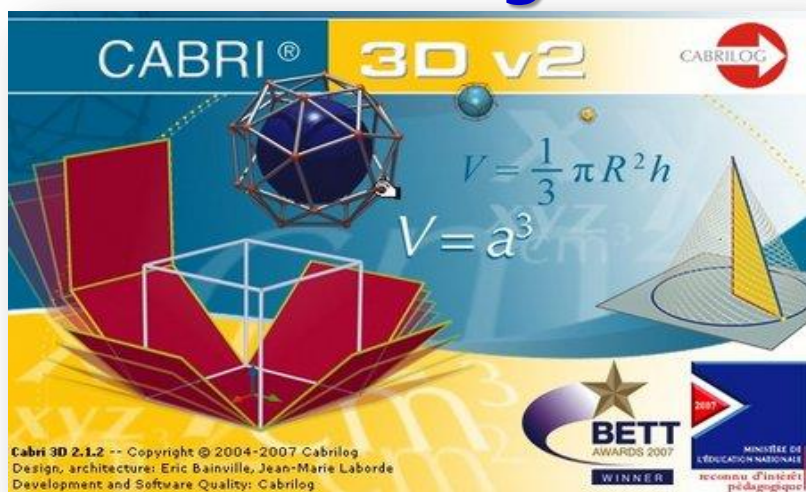
Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi.</p> <p>Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano.</p> 	<p>Il piano euclideo: uguaglianza di figure, poligoni (triangoli, quadrilateri, poligoni regolari) e loro proprietà.</p>	<p><u>Spazio e figure</u></p> <p>Argomentare e dimostrare</p> <p>Misurare</p> <p>Risolvere e porsi problemi</p> <p>Laboratorio di matematica</p>	<p>Disegno</p>





# *Il software per la geometria solida: questo sconosciuto ...*

## Cabri 3D



## Google Sketchup

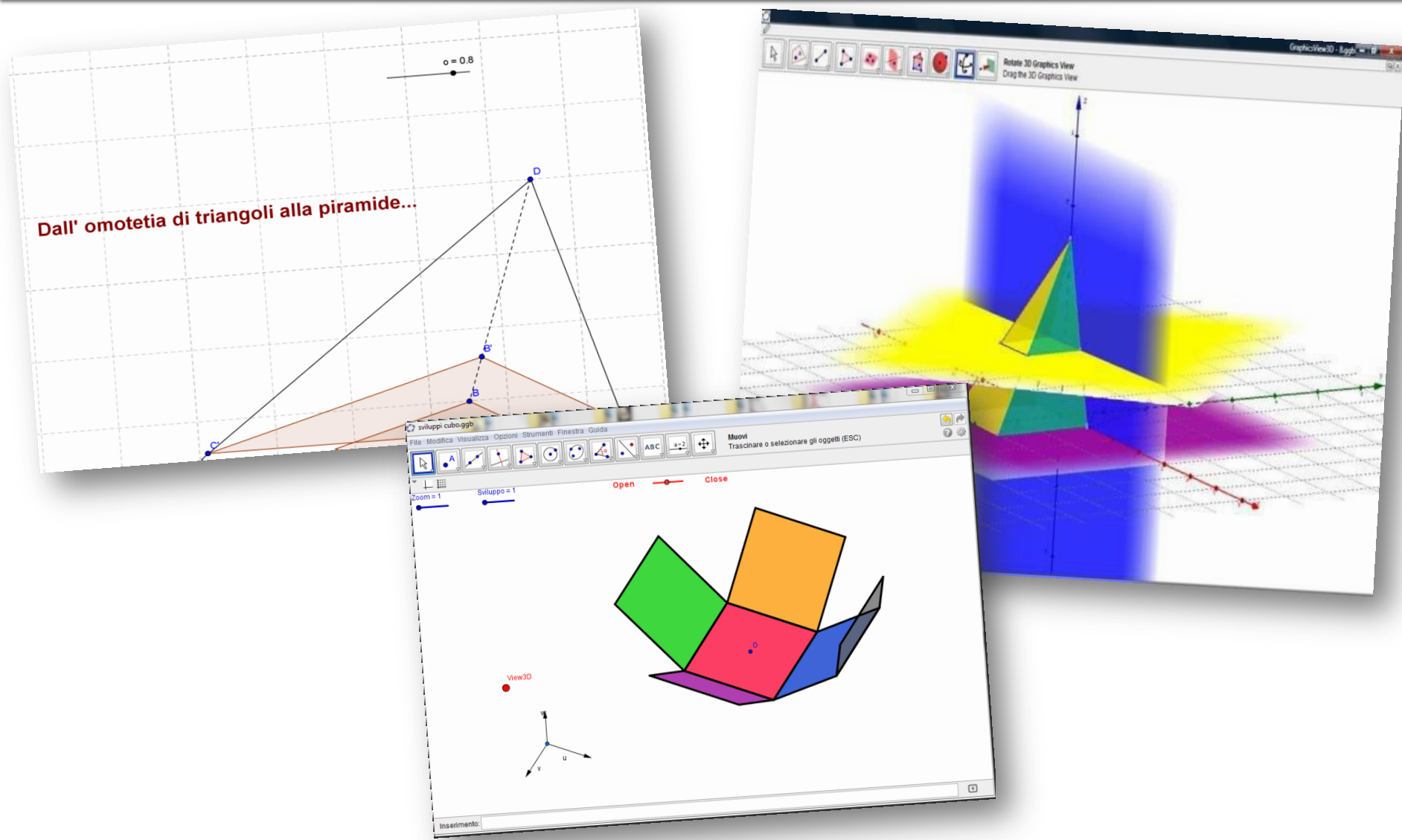


## Geogebra (3D) OPEN SOURCE



OPEN SOURCE

# Attività con software dinamico



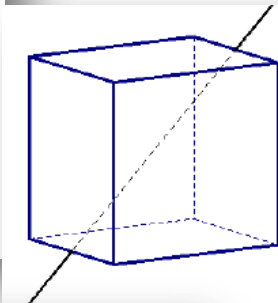
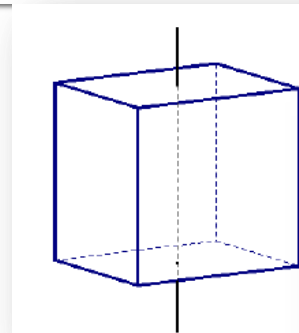
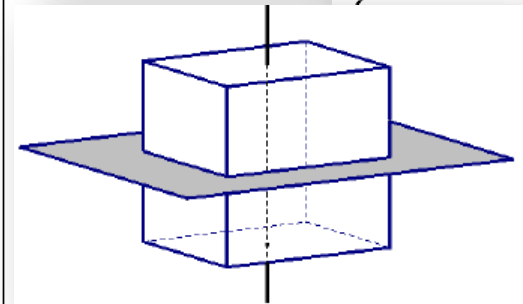
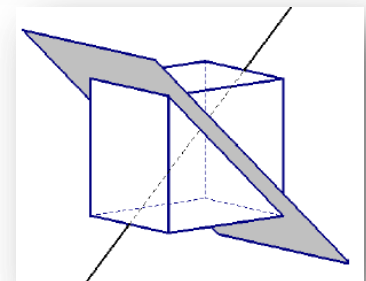
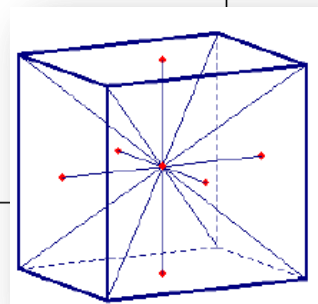
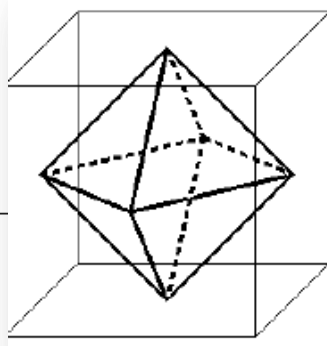
# Percorso m@t.abel

## Simmetrie nei poliedri

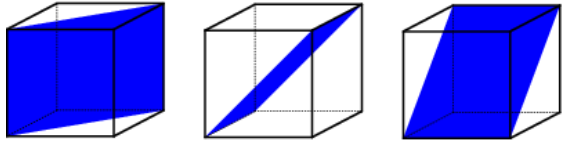
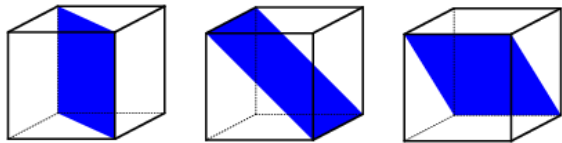
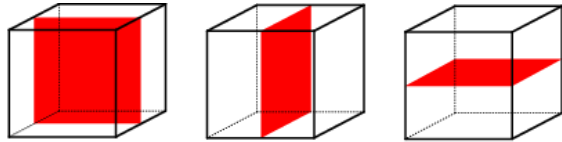
Livello scolastico: 1° biennio

Meglio secondo biennio?!

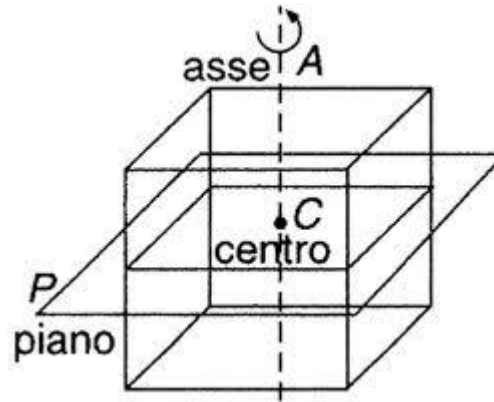
Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure geometriche note e descriverle con la terminologia specifica. Analizzare con strumenti intuitivi sezioni piane e sviluppi piani di poliedri. Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, ...). Individuare e riconoscere proprietà di figure del piano e dello spazio.	Poliedri: visualizzazioni spaziali tramite modelli e loro sviluppo piano.  Simmetrie nei poliedri regolari.	<u>Spazio e figure</u>  Numeri e algoritmi  Relazioni e funzioni  Argomentare, congetturare e dimostrare  Misurare  Risolvere e porsi problemi  Laboratorio di matematica	Storia dell'arte Disegno Storia Scienze



# Attività interdisciplinari matematica e scienze: i minerali e la loro struttura



[www.matematita.it](http://www.matematita.it)





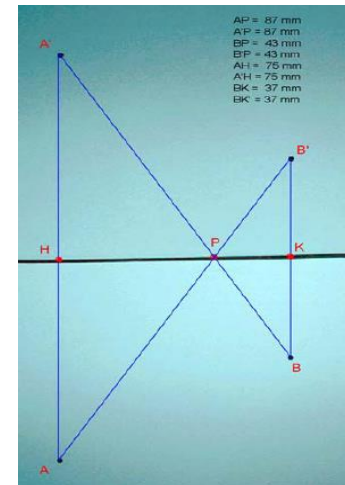
# Percorso m@t.abel

## Problemi di minimo nel piano

Livello scolastico: 1° biennio

Meglio secondo biennio?!

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
<p>Realizzare costruzioni geometriche elementari utilizzando strumenti diversi (riga e compasso, software di geometria, ...).</p> <p>Produrre congetture e riconoscerne la validità con semplici dimostrazioni.</p> <p>Analizzare e risolvere semplici problemi mediante l'applicazione delle isometrie.</p> <p>Utilizzare lo strumento algebrico come linguaggio per formalizzare gli oggetti della geometria elementare e passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato.</p>	<p>Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.</p>	<p><u>Spazio e figure</u></p> <p>Numeri e algoritmi.</p> <p>Relazioni e funzioni</p> <p>Argomentare, congetturare e dimostrare</p> <p>Misurare</p> <p>Risolvere e porsi problemi</p> <p>Laboratorio di matematica</p>	<p>Fisica</p>



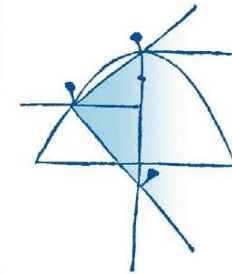
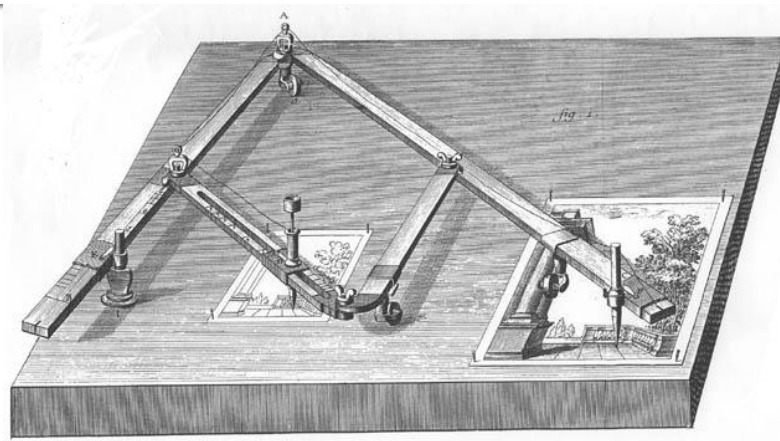
# *Attività interdisciplinari matematica e fisica: trasformazioni con gli specchi*



# Le trasformazioni geometriche e le macchine matematiche

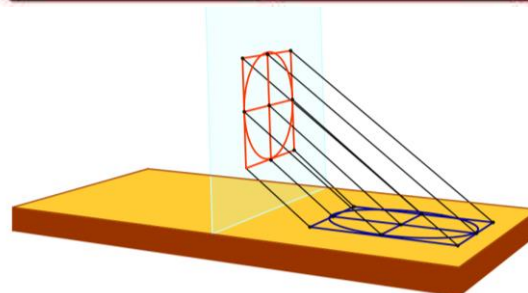
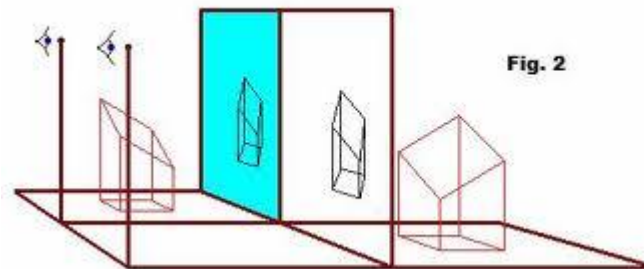
M. G. Bartolini Bussi  
M. Maschietto

## Macchine matematiche: dalla storia alla scuola



Laboratorio  
delle **Macchine**  
Matematiche

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI  
DI MODENA E REGGIO EMILIA  
*Ateneo fondato nel 1175*





## Le opere del Palladio: forme geometriche ..

### Le opere del Palladio: forme geometriche e simmetrie

Livello scolastico: 1° biennio

Meglio secondo biennio?!

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Individuare e riconoscere nel mondo reale le figure geometriche note e descriverle con la terminologia specifica.  Individuare proprietà invarianti per isometrie nel piano.	Dallo spazio al piano: nozioni intuitive.  Le isometrie nel piano: traslazioni, rotazioni, simmetrie.	<u>Spazio e figure</u>  Argomentare, congetturare, dimostrare  Risolvere e porsi problemi	Storia dell'arte Disegno Storia Latino

Esempio di scheda:

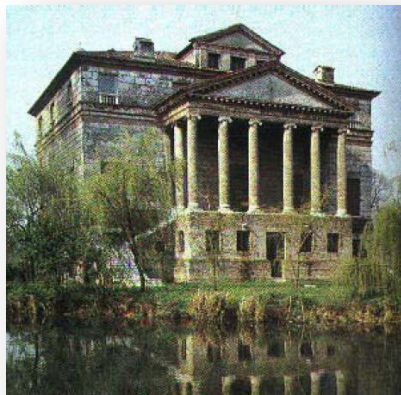
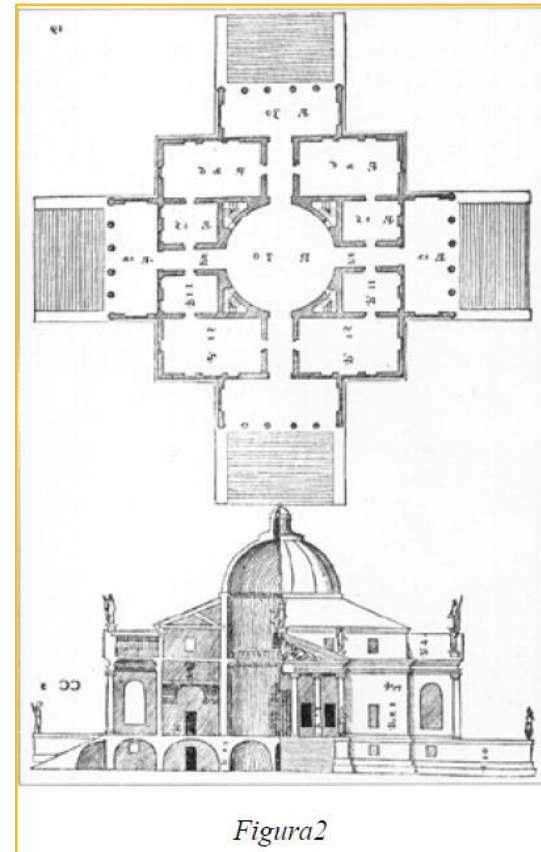
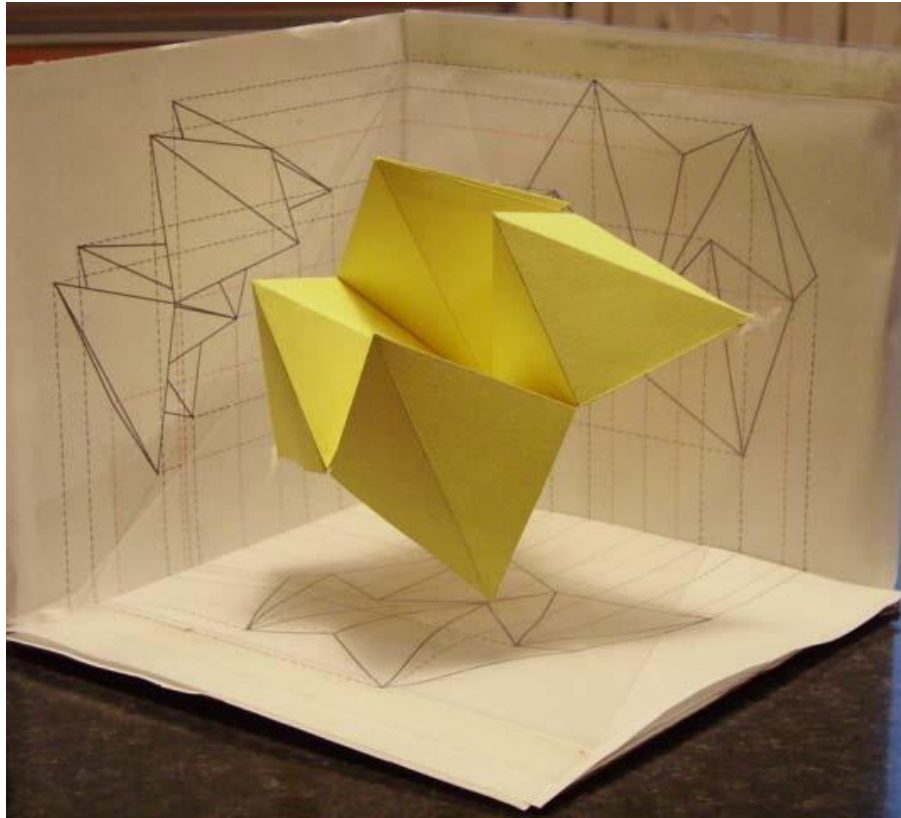


Figura analizzata (identificare con un numero la figura o fotografia scelta)	Solidi presenti	Caratteristiche principali del solido individuato	Figure piane	Caratteristiche principali della figura individuata
Fig.1 La Malcontenta	Cilindri, ...	Il cilindro presenta una superficie rotonda ..	Triangoli isosceli	I triangoli sono isosceli se .....
	Cubi			
Ci sono figure a cui non sei riuscito ad attribuire un nome? Quali sono? (indicare con un numero sulla illustrazione proposta). Secondo te è possibile descriverle? Prova a descriverle riferendoti agli elementi di geometria che ti sono noti?				

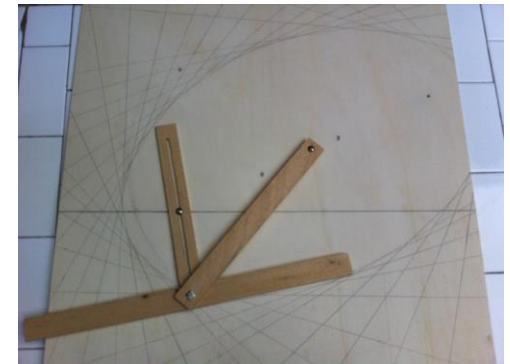
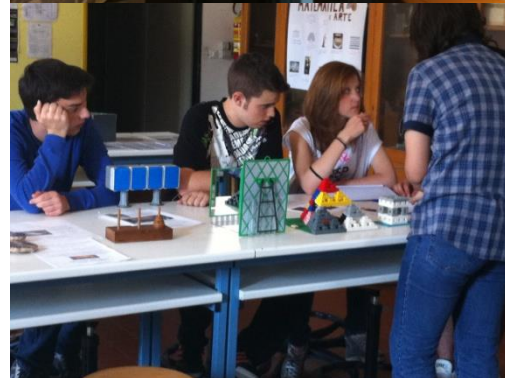
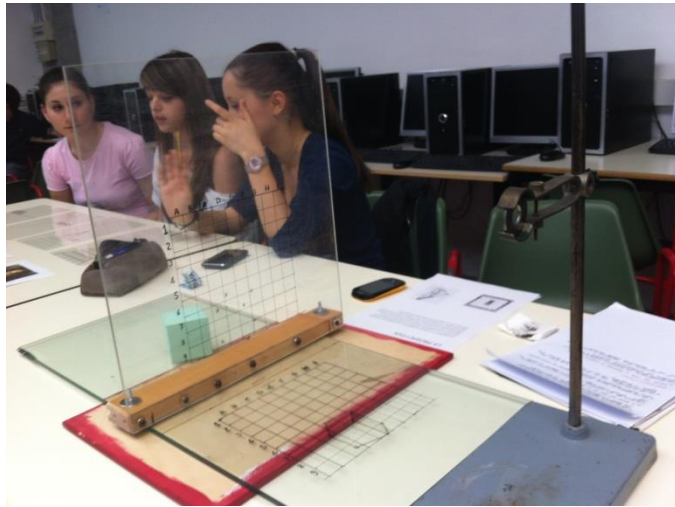
# *Piante di edifici, spaccati verticali proiezioni ortogonali e ...*



*Figura2*

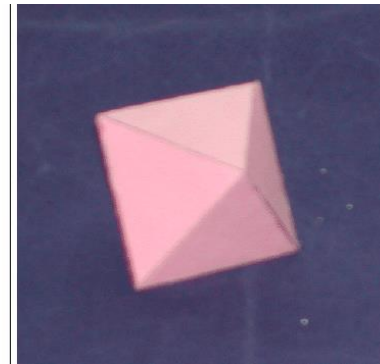
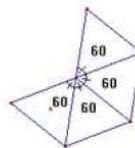
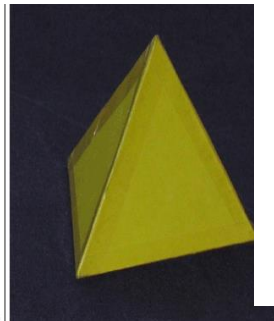
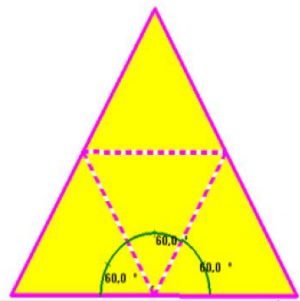
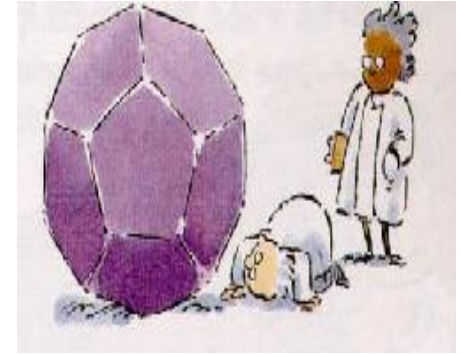
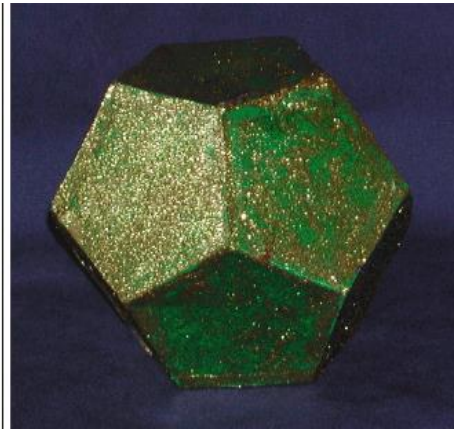
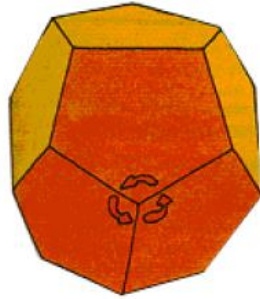
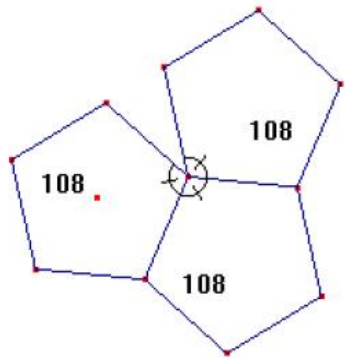
(A. Palladio - Villa Almerico detta "La Rotonda", Vicenza)

# *Percorsi didattici del triennio dalla geometria piana a quella solida e v.c.v.*





# *Percorso didattico sui solidi platonici: perché solo cinque?*



# Percorso storico-artistico-naturalistico

LICEO CLASSICO STATALE "LUDOVICO ARIOSTO", FERRARA

17 febbraio 2012



## Modelli di poliedri (i solidi platonici in particolare) da *Cabri 3D* ai fenomeni reali: alcuni esempi

Luigi Tomasi

Liceo Scientifico "Galileo Galilei", Adria (RO)

luigi.tomasi@unife.it

Durante il Rinascimento gli artisti usarono i solidi platonici e, più in generale, molti poliedri nelle loro produzioni e per lo studio delle proprietà della prospettiva.

Per esempio Paolo Uccello (1397 - 1475) applicò i solidi platonici ed i poliedri nelle sue opere.

Famoso da questo punto di vista è il mosaico realizzato nella Basilica di S. Marco a Venezia



I poliedri regolari in Platone  
terra, fuoco, aria, acqua e...  
la forma dell'universo



Luca Pacioli (1445 - 1514)

I poliedri disegnati da Leonardo nel  
*De divina proportione*



### I POLIEDRI NELLA STORIA DA PLATONE A ESCHER

• I poliedri regolari erano conosciuti dagli antichi Greci fin dal VI sec. a.C. nella Scuola pitagorica



• Platone, nel *Timeo*, descrive i cinque poliedri regolari e le loro proprietà; quattro li assume come forme degli elementi: aria, acqua, terra e fuoco; e il quinto (dodecaedro regolare) l'etere, "che Dio usò per decorare l'universo".

• Trattazione completa dei poliedri regolari nel XIII libro degli *Elementi* di Euclide (circa III sec. a.C.)

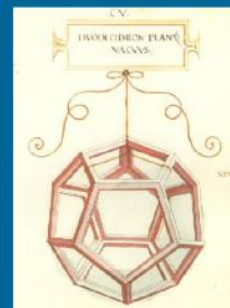


Keplero (1571 – 1630) afferma che Dio nel creare l'universo tenne presenti i cinque poliedri regolari

(J. Kepler, *Harmonices Mundi*)



I disegni di Leonardo  
per il libro di Pacioli



- Archimede e i solidi archimedei
- Keplero afferma che Dio nel creare l'universo tenne presenti i cinque poliedri regolari
- le forme geometriche "perfette" in natura, nell'arte, in architettura, nella meccanica e nell'ottica



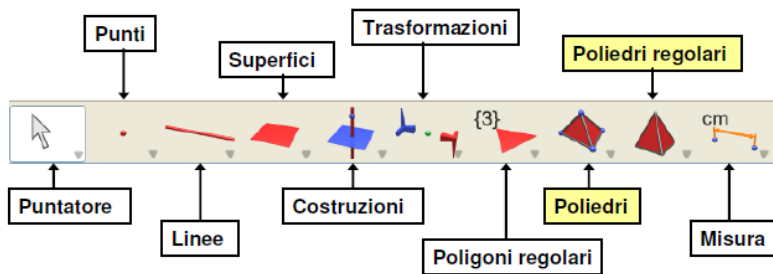


# *Attività laboratoriali: costruire solidi*

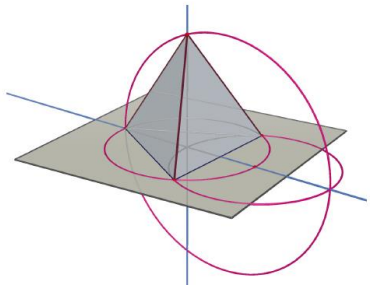


# Poliedri con il software dinamico Cabri 3D

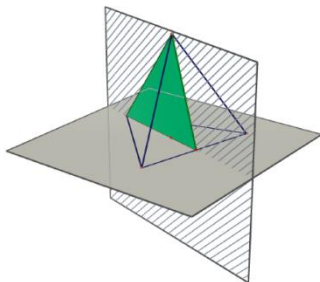
## Gli strumenti di Cabri 3D



### poliedro con Cabri 3D



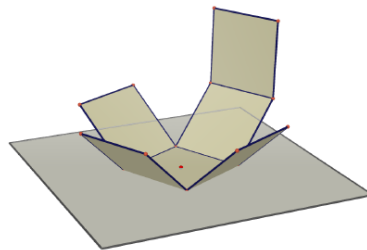
### Simmetrie dei poliedri



### Sviluppo di un poliedro

#### (e costruzione di un modello)

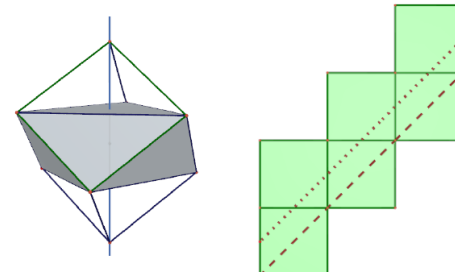
dallo spazio al piano; possibile difficoltà didattica:  
Cabri 3D fornisce un solo sviluppo di un poliedro



## Poliedri: cosa si può fare con Cabri 3D?

- Costruzioni “con riga e compasso” nello spazio di un poliedro
- Poliedri (tetraedri, piramidi, prismi,...)
- Poliedri regolari
- La formula di Eulero
- Che cos'è un poliedro?
- Sezioni di poliedri e sviluppi di poliedri
- Poliedri archimedei
- Simmetrie dei poliedri regolari
- Equiscomponibilità ed equiestensione tra poliedri

### Un poliedro particolare ottenuto dal cubo



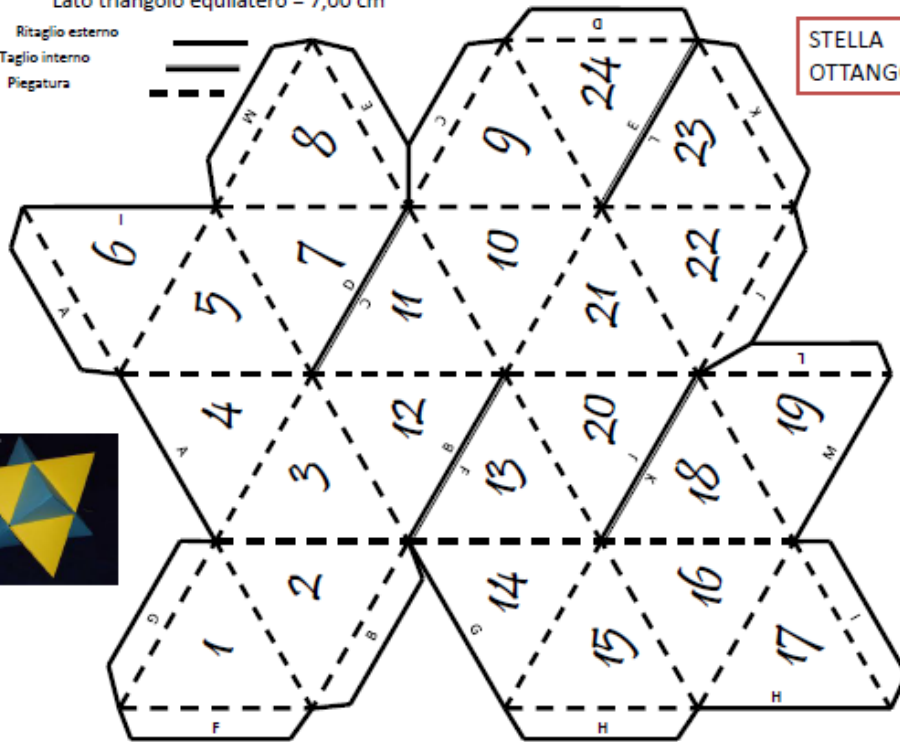
# Percorso dagli sviluppi piani di solidi alle figure solide anche con software

18

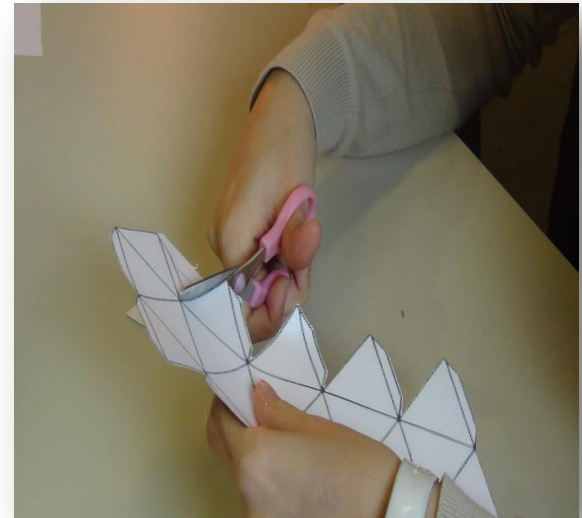
Lato triangolo equilatero = 7,00 cm

Ritaglio esterno  
Taglio interno  
Piegatura

STELLA  
OTTANGOLA

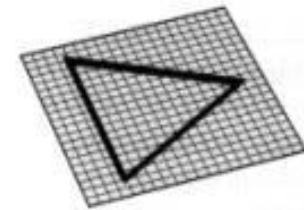
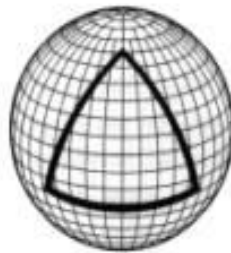
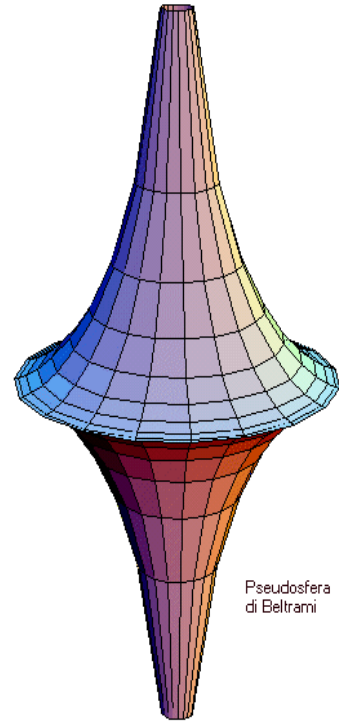
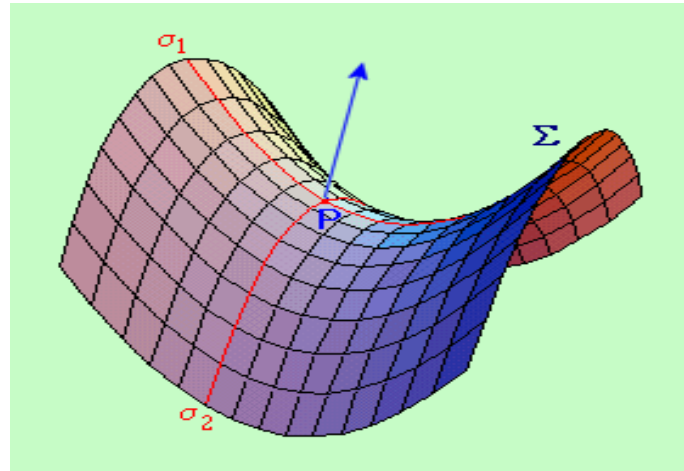
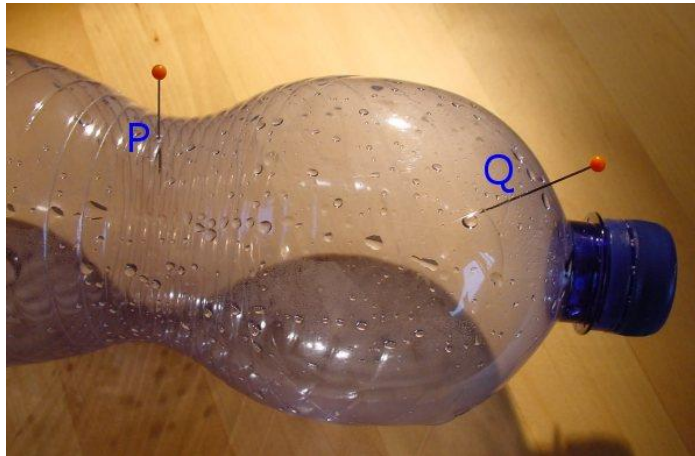


Prof.ssa Rossella D'Imperzano

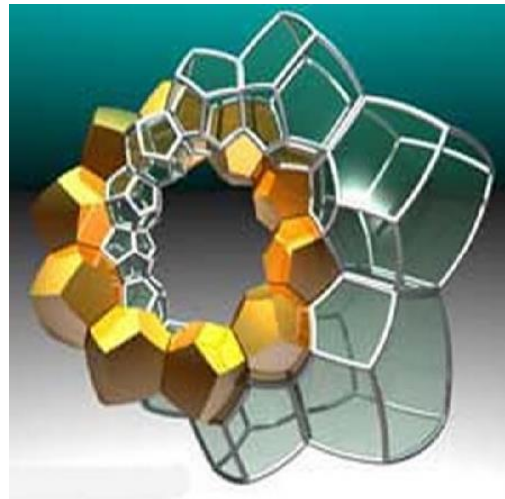
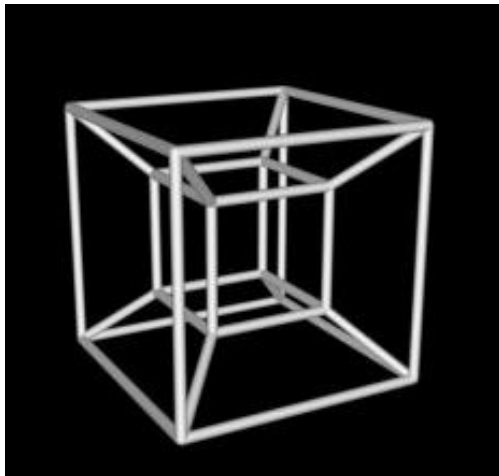
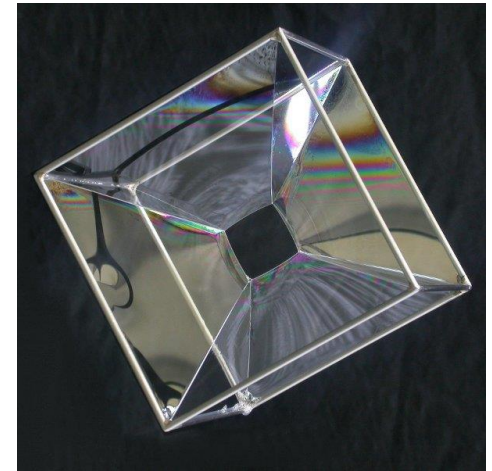
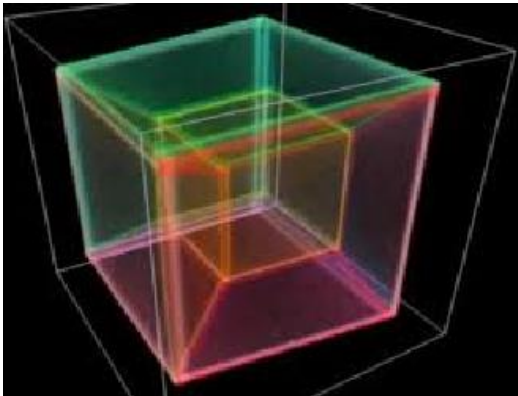




# La Geometria non euclidea e i modelli ...

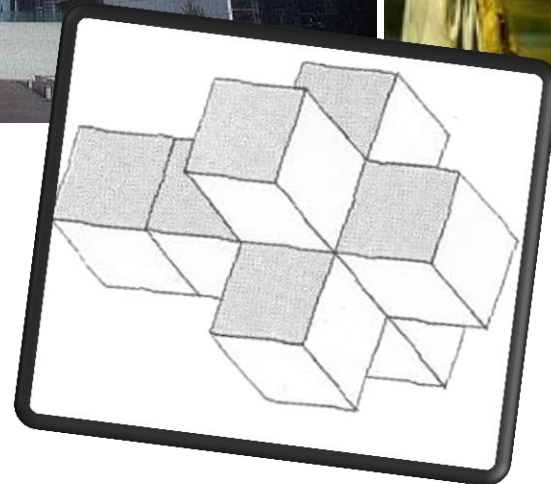
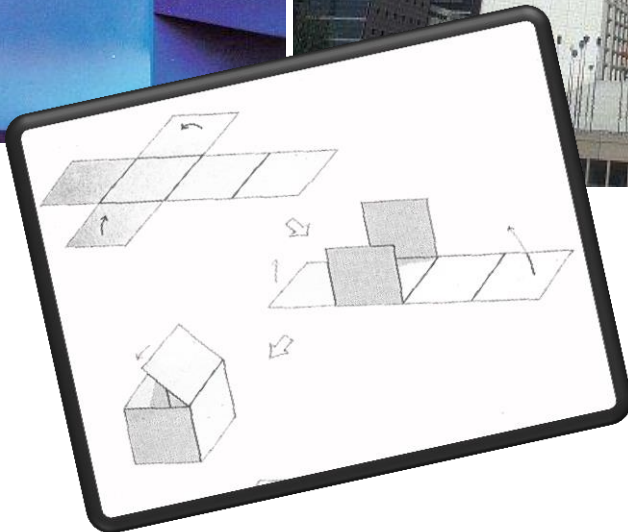
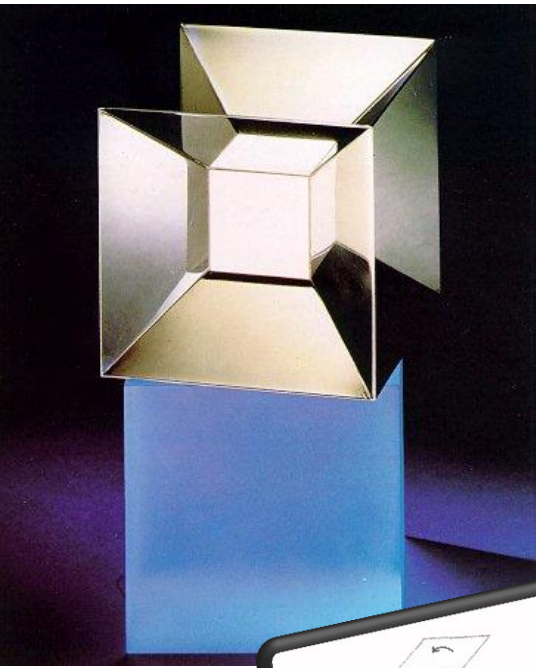


# *Geometria non euclidea e modelli ... verso la quarta dimensione ...*

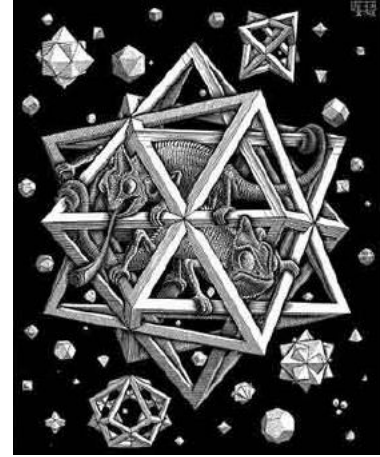




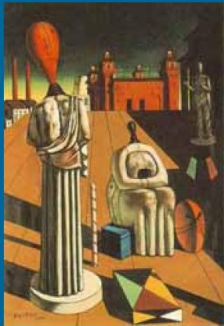
# *Percorsi pluridisciplinari ... verso l'Esame: quarta dimensione*



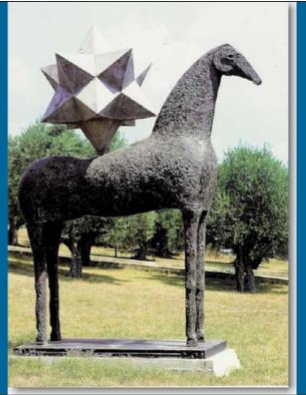
# *Percorsi pluridisciplinari ...verso l'Esame: matematica e arte*



Giorgio De  
Chirico  
(1888-1978)  
Le muse  
inquietanti,  
1918

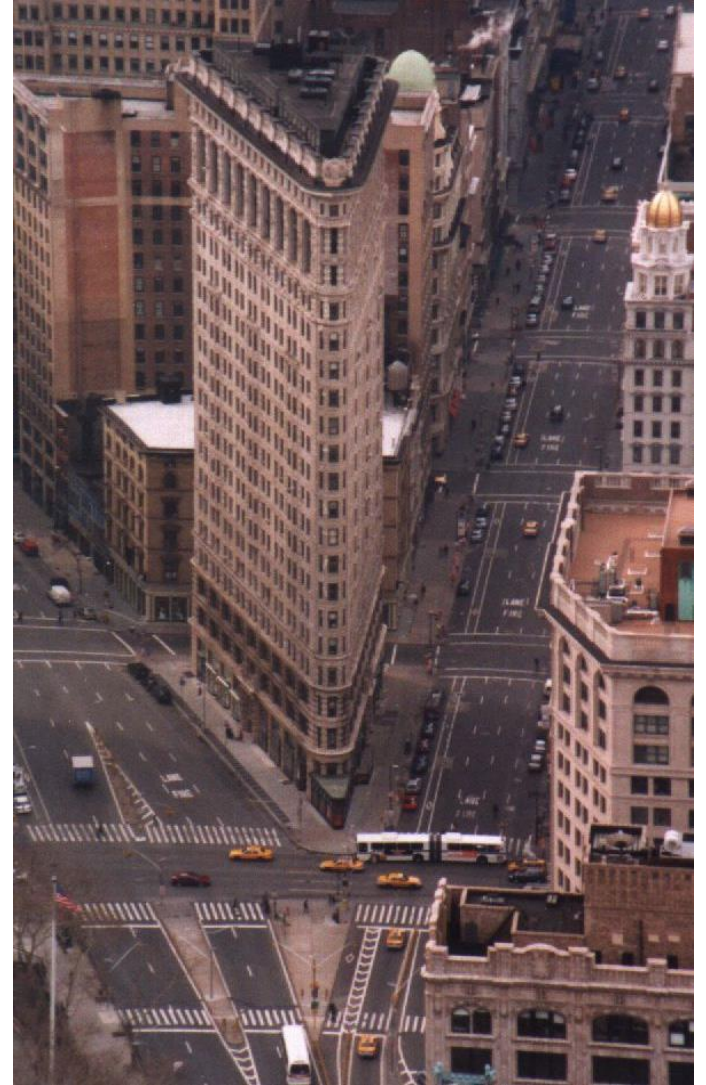


D. Paladino  
Zenith,  
Venezia,  
2005





# *Percorsi pluridisciplinari ... verso l'Esame: matematica e architettura*





# Fonti d'ispirazione...

- Proposte didattiche UMI Matematica 2003- 2004
- Percorsi [m@t.abel](mailto:m@t.abel) (elenco)
- <http://www.korthalsaltes.com/> (modelli di poliedri)
- <http://www.mathconsult.ch/showroom/unipoly/unipoly.html>
- [http://www.dmmm.uniroma1.it/~giuseppe.accascina/Geometria\\_del\\_lo\\_spazio/](http://www.dmmm.uniroma1.it/~giuseppe.accascina/Geometria_del_lo_spazio/)
- [http://www.sbai.uniroma1.it/~giuseppe.accascina/2013\\_PLS-Progetto\\_Archimede/Strumenti\\_per\\_creatre\\_modelli.htm](http://www.sbai.uniroma1.it/~giuseppe.accascina/2013_PLS-Progetto_Archimede/Strumenti_per_creatre_modelli.htm)
- <http://win.sofiasabatti.it/solidi.html> (secondaria I grado)
- <http://comi.professor.polimi.it/o8%20modelli%20e%20didattica.pdf>
- <http://www.matematita.it/materiale/?p=cat&sc=271,272,706>
- Romanzo «Flatlandia», Edwin Abbott, Ed. Adelphi
- Sulla quarta dimensione: <http://xoomer.virgilio.it/matematico82/mappasito.html>
- [http://www.liceolefilandiere.it/studenti/tesine/quarta\\_dimensione/ipercubi/ipercubi.htm](http://www.liceolefilandiere.it/studenti/tesine/quarta_dimensione/ipercubi/ipercubi.htm)
- <http://www.formath.it/divulgazione-scientifica/le-relazioni-platoniche>

# Grazie per la partecipazione!

