

LICEO CLASSICO STATALE “LUDOVICO ARIOSTO”, FERRARA

17 febbraio 2012



## **Modelli di poliedri (i solidi platonici in particolare) da *Cabri 3D* ai fenomeni reali: alcuni esempi**

**Luigi Tomasi**

Liceo Scientifico “Galileo Galilei”, Adria (RO)

luigi.tomasi@unife.it

## **Gli “oggetti” della matematica**

- **Nell’opinione comune la matematica è vista come un edificio completo in ogni sua parte, in cui non c’è più nulla da scoprire, né tantomeno da inventare.**
- **In genere si ha un’idea “naturalistica” della matematica, sulla base di quanto scriveva Galileo, per cui gli oggetti della matematica sarebbero idealizzazioni degli oggetti fisici.**
- **Alcuni matematici pensano invece che, al contrario, il mondo fisico sia “generato” da quello matematico, in quanto esso sembra comportarsi “secondo la matematica”.**

## **Il matematico Roger Penrose (nel 1998) sulla matematica**

*Una delle cose più notevoli nel funzionamento del mondo è come esso sembri fondato sulla matematica a un grado di precisione stupefacente.*

*Più comprendiamo il mondo fisico e più approfondiamo l'esplorazione delle leggi della natura, più sembra che il mondo fisico quasi si dissolva, e rimanga soltanto matematica.*

*Quanto più a fondo comprendiamo le leggi della fisica, tanto più scivoliamo nel mondo dei concetti matematici.*

## **I poliedri: partiamo dai presocratici**

Molte delle grandi idee della matematica hanno origine nella matematica greca, prima di Socrate, fra il VI e il V sec. a.C.

Ricordiamo Pitagora (580 – 497 a.C) che individua nel numero la sostanza di tutte le cose e giustifica la diversità degli elementi aria, acqua, terra e fuoco in base alla differente forma geometrica delle cose che li compongono.

Filolao, un tardo pitagorico (460 – 390 a.C.), associa a ciascuno degli elementi un poliedro regolare, creando così le coppie aria-ottaedro, acqua-icosaedro, terra-cubo, fuoco-tetraedro, che furono riprese da Platone (427 – 347 a.C).

## I poliedri: un tema platonico

Il primo documento che contiene riferimenti ai poliedri regolari risale a Platone. Sebbene egli non abbia dato alcun contributo specifico alla matematica dal punto di vista strettamente tecnico, fu, tuttavia, al centro dell'attività matematica di quel tempo e guidò ed ispirò il suo sviluppo.

Probabilmente il filosofo di Atene venne a conoscenza dei cinque solidi regolari in occasione di un incontro in Sicilia con Archita, un matematico della scuola pitagorica.

A tale scuola si attribuisce la scoperta del cubo, del tetraedro e del dodecaedro regolari, mentre la scoperta dell'ottaedro e dell'icosaedro regolari viene fatta risalire al matematico e filosofo ateniese Teeteto (V - IV sec. a.C.).

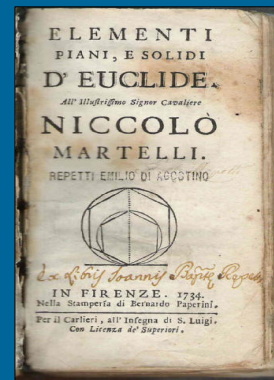
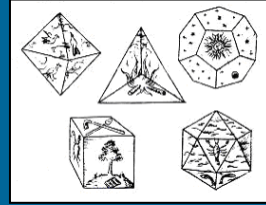
## I poliedri regolari: perché “solidi platonici”?

I poliedri regolari sono passati alla storia sotto il nome di solidi platonici o poliedri regolari o corpi platonici.

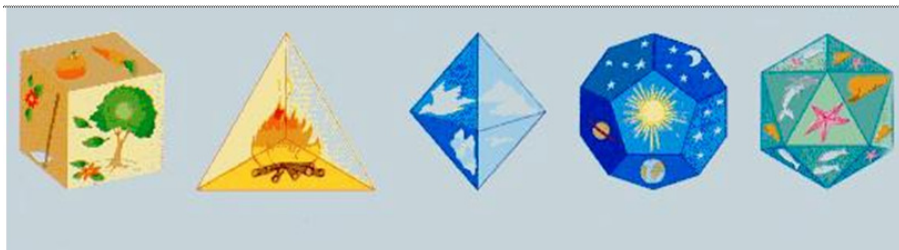
In Euclide è presente una trattazione approfondita dei poliedri; a quelli regolari addirittura il grande matematico greco dedica il XIII libro degli *Elementi*, quello conclusivo, che costituisce il coronamento dell'opera.

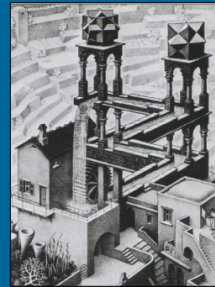
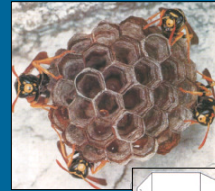
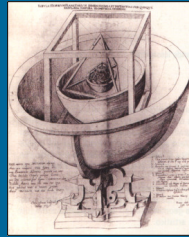
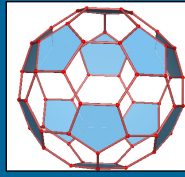
## I POLIEDRI NELLA STORIA DA PLATONE A ESCHER

- I poliedri regolari erano conosciuti dagli **antichi Greci** fin dal VI sec. a.C. nella Scuola pitagorica
- **Platone**, nel *Timeo*, descrive i cinque poliedri regolari e le loro proprietà; quattro li assume come forme degli elementi: aria, acqua, terra e fuoco; e il quinto (dodecaedro regolare) l'etere, "che Dio usò per decorare l'universo".
- Trattazione completa dei poliedri regolari nel XIII libro degli *Elementi* di **Euclide** (circa III sec. a.C.)



## I poliedri regolari in Platone terra, fuoco, aria, acqua e... la forma dell'universo





- **Archimede** e i solidi archimedei
- **Keplero** afferma che Dio nel creare l'universo tenne presenti i cinque poliedri regolari
- le forme geometriche "perfette" in **natura**, nell'**arte**, in **architettura**, nella **meccanica** e nell'**ottica**

## ***I poliedri nell'arte***

- Il periodo storico in cui si ebbe il maggiore utilizzo dei poliedri nell'arte fu il Rinascimento.
- La composizione di molte opere d'arte in quel periodo si basava su una figura pitagorica.
- Si possono leggere le seguenti righe di Piero della Francesca:

*"Multa sunt corpora lateribus constituta, quae in spherico corpore locari queunt, ita ut eorum anguli sphaerae superficiem omnes contingunt. Verum quinque ex eis tantummodo sunt regularia: hoc est, quae aequales bases habent et latera"*<sup>[1]</sup>

(Piero della Francesca, *Libellus de quinque corporibus regularibus*, 1480 ca.).

<sup>[1]</sup> "Sono molte le figure costituite di lati che si possono inscrivere nella sfera in modo che i loro angoli tocchino tutti la superficie della sfera. Tuttavia soltanto cinque di essi sono regolari, cioè quelli che hanno angoli e lati uguali".

Durante il Rinascimento gli artisti usarono i solidi platonici e, più in generale, molti poliedri nelle loro produzioni e per lo studio delle proprietà della prospettiva.

Per esempio Paolo Uccello (1397 - 1475) applicò i solidi platonici ed i poliedri nelle sue opere.

Famoso da questo punto di vista è il mosaico realizzato nella Basilica di S. Marco a Venezia

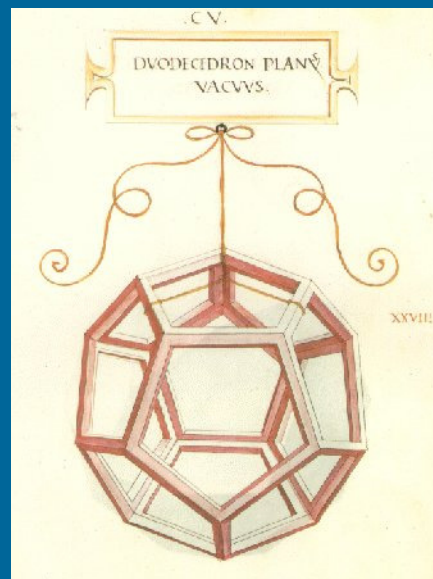


**Luca Pacioli (1445 - 1514)**

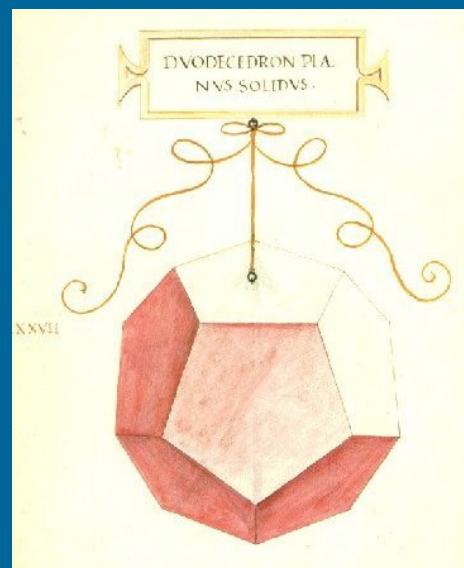
I poliedri disegnati da Leonardo nel  
*De divina proportion*



I disegni di Leonardo  
per il libro di Pacioli

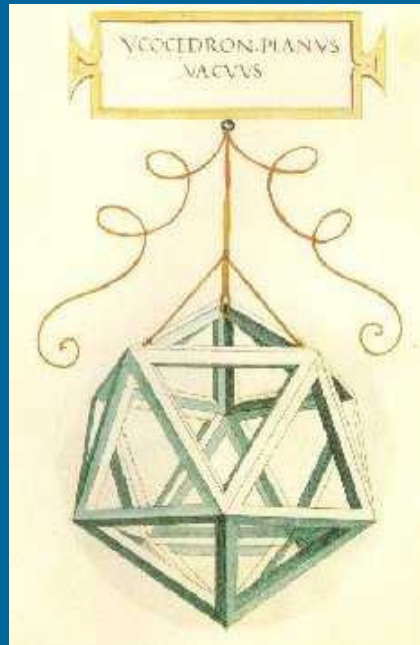


I disegni di Leonardo  
per il libro di Pacioli

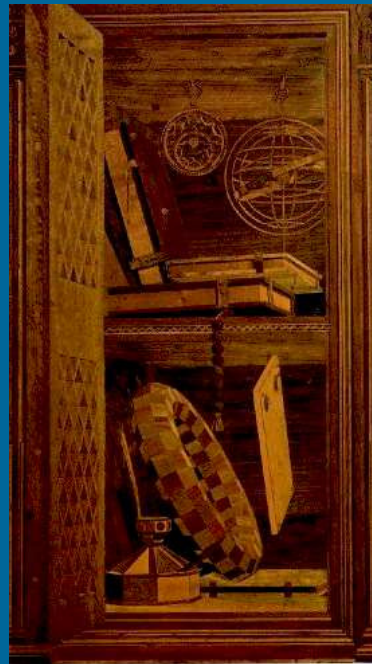




I disegni di Leonardo  
per il libro di Pacioli



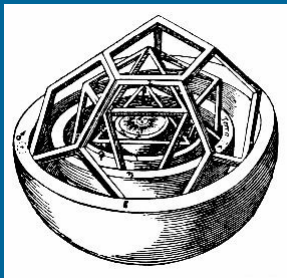
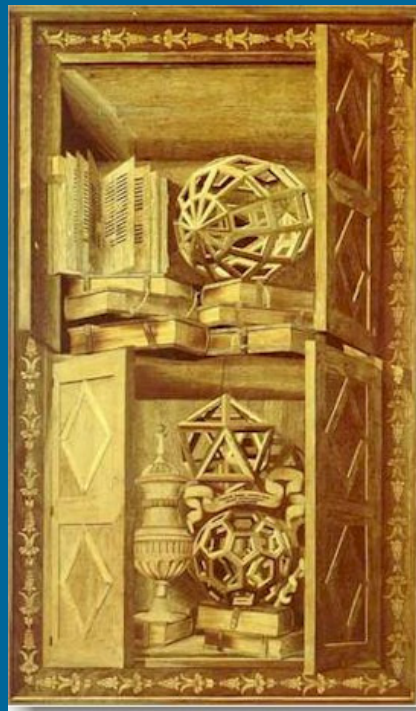
**Fra Giovanni da Verona**  
nel 1520 usò i disegni  
di Leonardo per  
progettare i suoi intarsi  
per i pannelli della  
Chiesa di Santa Maria  
in Organo a Verona





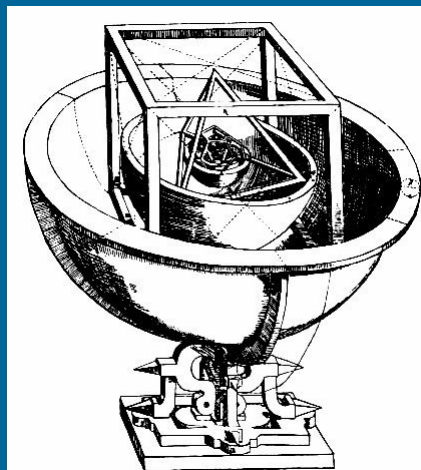
Si noti in un pannello la rappresentazione dell'icosaedro oltre ad altri poliedri non regolari.

Nel pannello precedente si trova un riferimento al mazzocchio di Paolo Uccello e le sfere armillarie che evocano la rappresentazione del sistema solare come a stabilire una correlazione tra poliedri e rappresentazioni dell'universo. L'idea sarà ripresa in modo significativo nell'opera di Keplero.



**Keplero** (1571 – 1630) afferma che Dio nel creare l'universo tenne presenti i cinque poliedri regolari

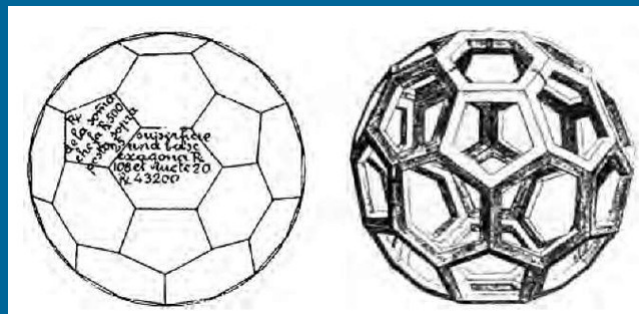
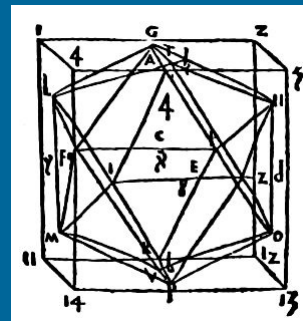
(J. Kepler, *Harmonices Mundi*)




**Piero della  
Francesca  
(1410? – 1492)**  
un matematico  
pittore



**Piero della Francesca  
(1410? – 1492)**  
*Libellus de quinque  
corporibus  
regularis*



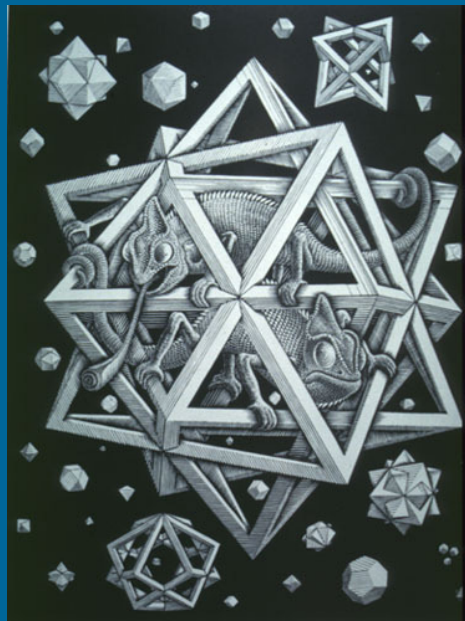
A black and white portrait of John Locke, an English philosopher, seated and looking slightly to the left. He is wearing a dark coat over a white cravat. His hands are resting on a large open book on a table in front of him.
$$V + F = S + 2$$

11

**Giorgio De  
Chirico**  
**(1888-1978)**  
**Le muse  
inquietanti,**  
**1918**



**M.C. Escher**  
**(1898-1972)**  
**Stelle, 1948**





**Salvador  
Dalì**

**L'ultima  
cena  
(1955)**

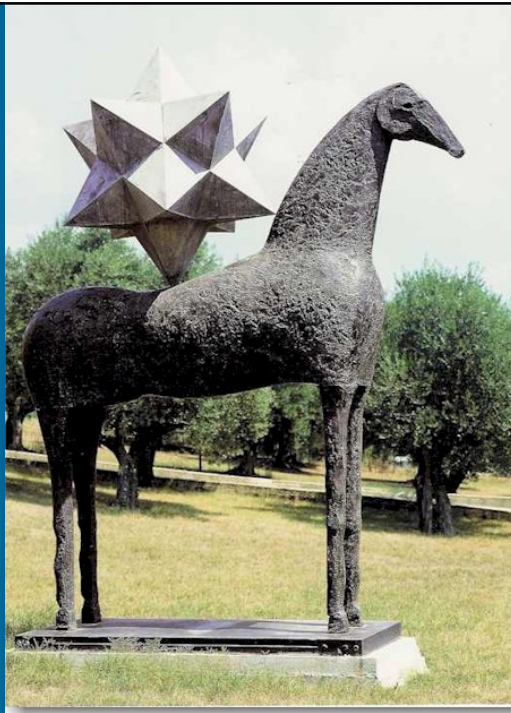


**Salvador  
Dalì**

**Crucifixion  
(Corpus  
Hypocubus,  
1954)**



**D. Paladino**  
**Zenith,**  
**Venezia,**  
**2005**



**Lucio Saffaro**  
**1929 - 1998**  
**Il richiamo del**  
**tempo**





**Lucio Saffaro**  
(1929 –  
1998)

**Ritratto di  
Keplero**



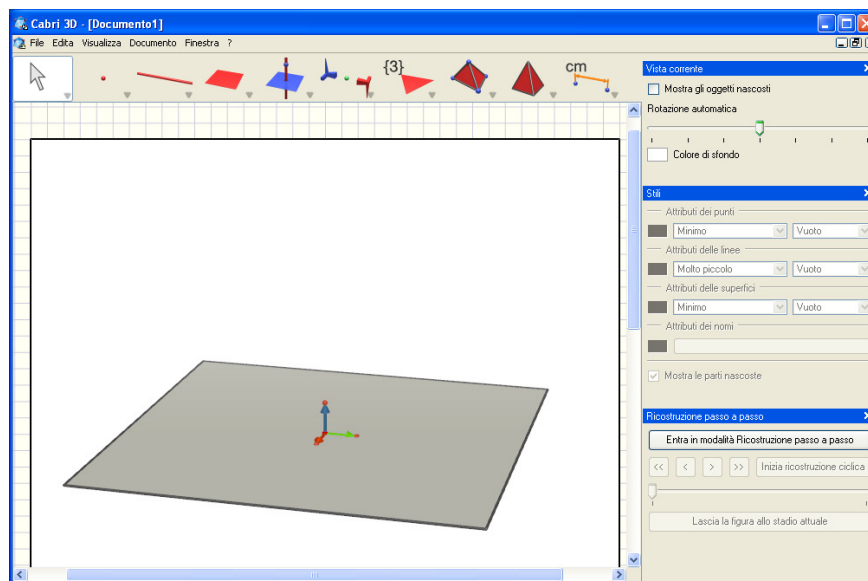
**Lucio Saffaro**  
(1929 –  
1998)

**Monumento a  
Keplero**

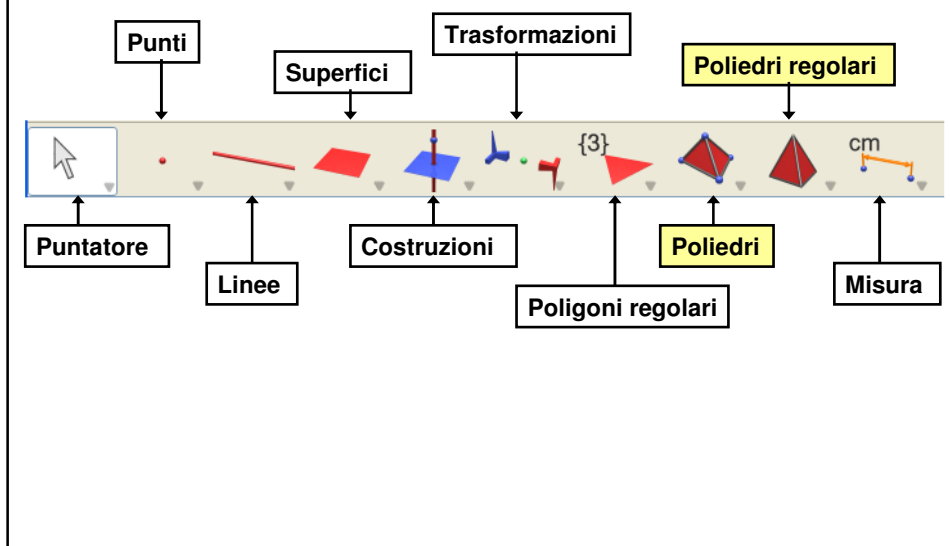


## Rappresentazione degli oggetti tridimensionali: il software *Cabri 3D*

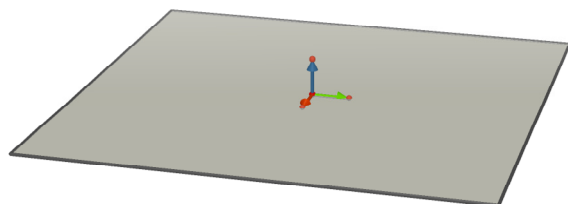
### La finestra di lavoro di *Cabri 3D*



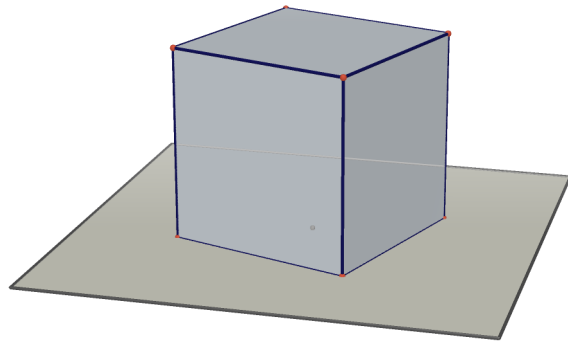
## Gli strumenti di *Cabri 3D*



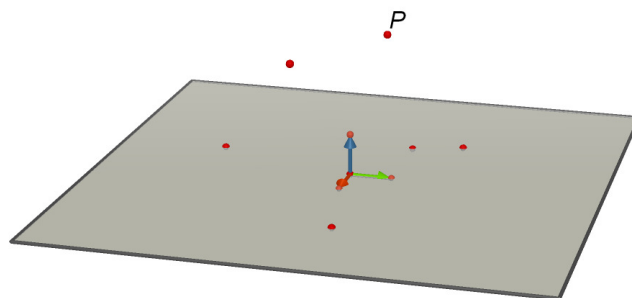
## Il piano di riferimento e la rappresentazione in prospettiva



## Rappresentazione di un cubo...



## Un problema iniziale nell'uso di *Cabri 3D*: come si creano i punti?

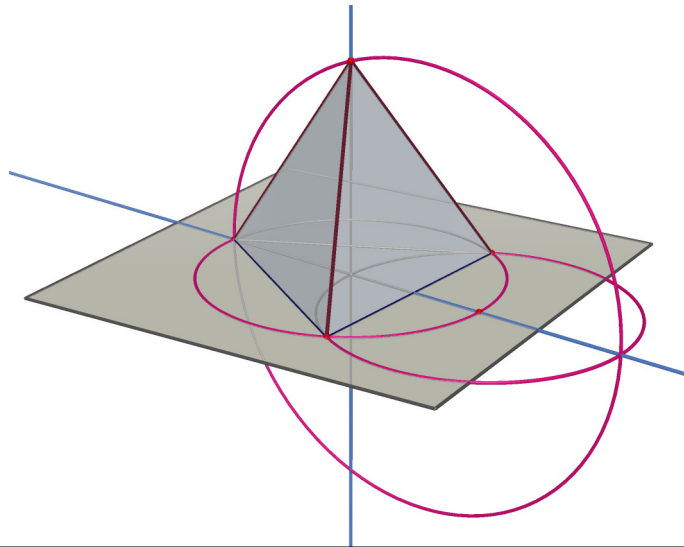


## I poliedri con *Cabri 3D*

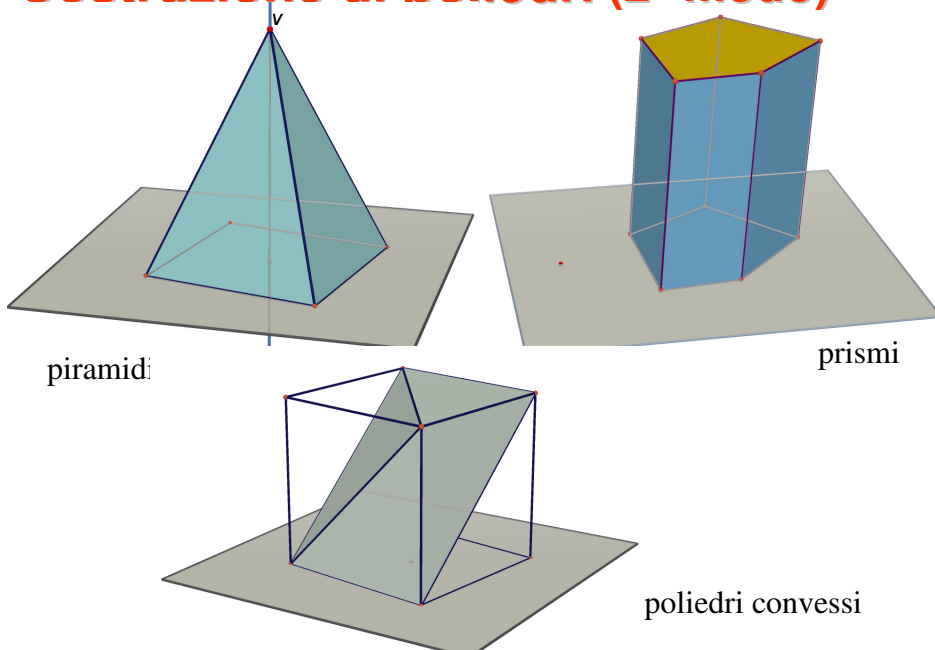
### Poliedri: cosa si può fare con *Cabri 3D*?

- Costruzioni “con riga e compasso” nello spazio di un poliedro
- Poliedri (tetraedri, piramidi, prismi,...)
- Poliedri regolari
- La formula di Eulero
- Che cos'è un poliedro?
- Sezioni di poliedri e sviluppi di poliedri
- Poliedri archimedei
- Simmetrie dei poliedri regolari
- Equiscomponibilità ed equiestensione tra poliedri

## Un primo modo di costruire un poliedro con *Cabri 3D*

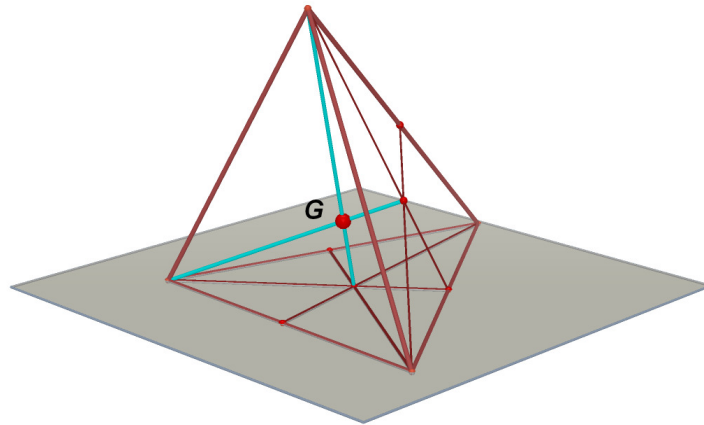


## Costruzione di poliedri (2° modo)

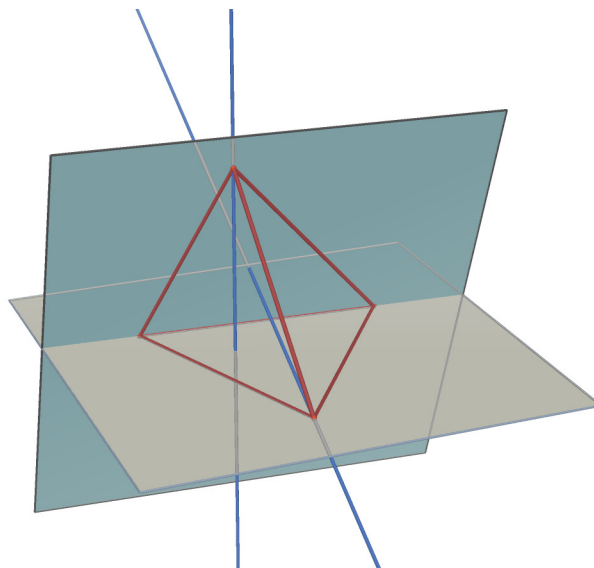




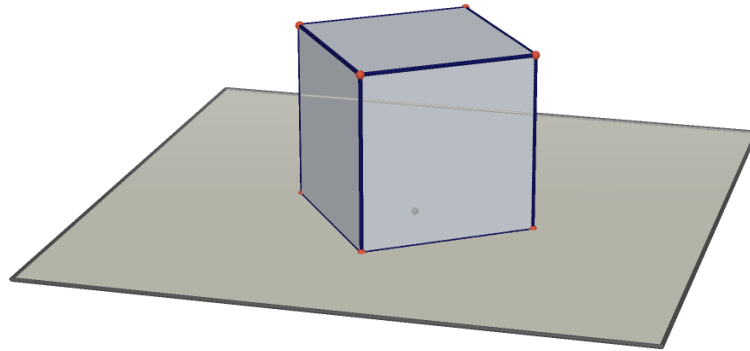
## Mediane di un tetraedro



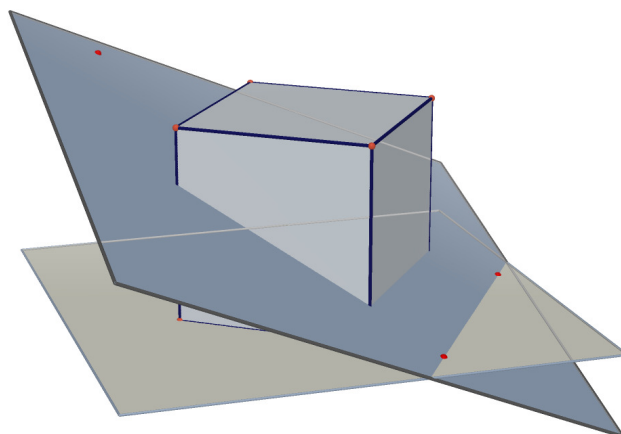
## Altezze di un tetraedro



## Costruzioni di un cubo

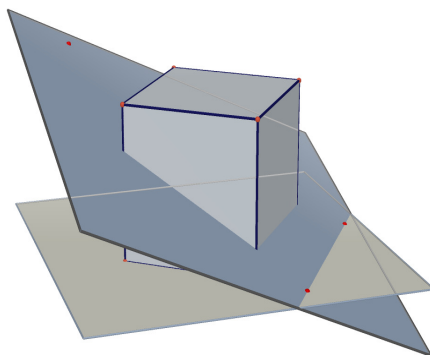


## Sezioni di un poliedro

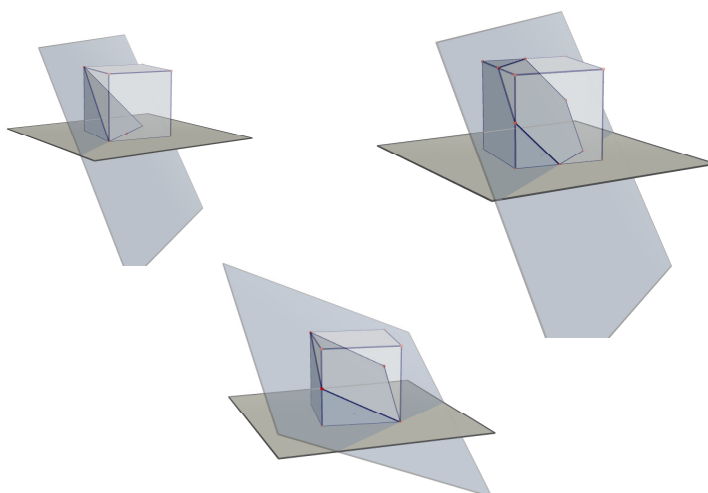


## Problema

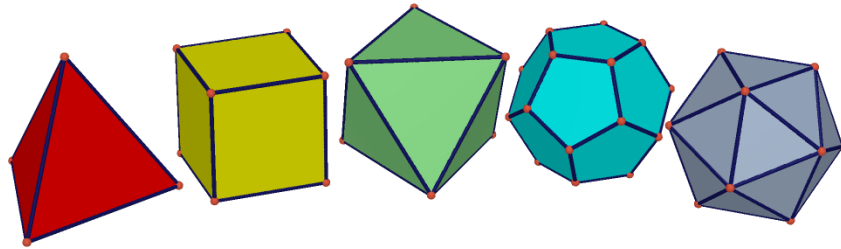
Si seziona un cubo con un piano: che tipi di poligoni si possono ottenere? Ce ne sono di regolari? Quali?



## Sezioni particolari di un cubo



## I poliedri regolari (solidi platonici)

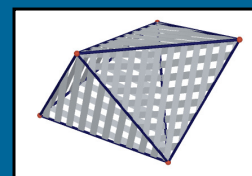
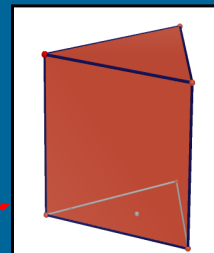
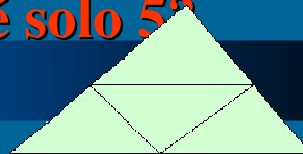


## Poliedri regolari: perché solo 5?

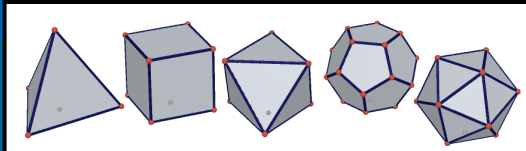
Un poliedro (convesso) si dice **regolare** se tutte le sue facce sono poligoni regolari congruenti e tutti i suoi angoloidi sono congruenti

Dalla definizione discende che affinché un poliedro convesso sia regolare occorre che esso verifichi tre condizioni:

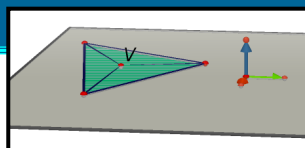
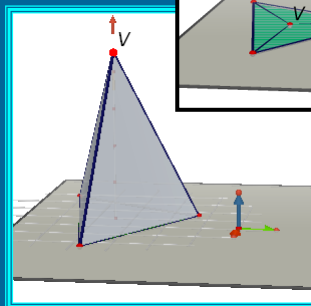
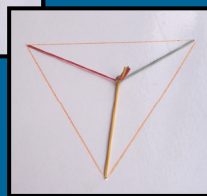
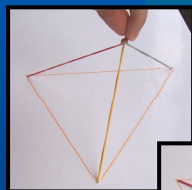
- Le sue facce sono poligoni regolari
- Le facce sono tra loro congruenti
- Da ciascun vertice esce lo stesso numero di spigoli



Teorema: *Esistono esattamente 5 tipi di poliedri regolari.*

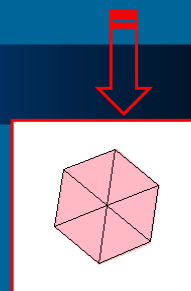
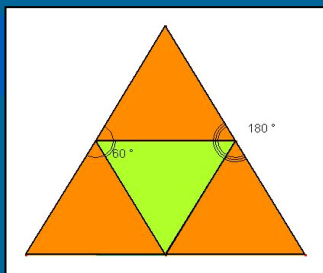


La somma degli angoli che delimitano un angoloide non può raggiungere  $360^\circ$

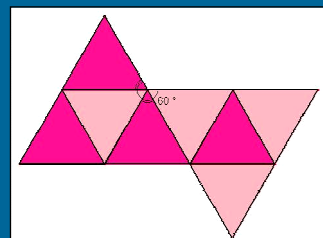


Tetraedro  
ottaedro  
icosaedro

Facce triangolari



$$\begin{aligned} 3 \cdot 60^\circ &= 180^\circ \\ 4 \cdot 60^\circ &= 240^\circ \\ 5 \cdot 60^\circ &= 300^\circ \end{aligned}$$



● Cubo

$3 \cdot 90^\circ = 270^\circ$

$3 \cdot 108^\circ = 324^\circ$

● dodecaedro

## Costruzioni e proprietà

Poliedro regolare	Lati di una faccia : $l$	Poligoni che Concorrono in ogni vertice : $n$	Facce : $f$	Vertici : $v$	Spigoli : $s$
tetraedro	3	3	4	4	6
ottaedro	3	4	8	6	12
cubo	4	3	6	8	12
dodecaedro	5	3	12	20	30
icosaedro	3	5	20	12	30

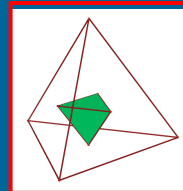
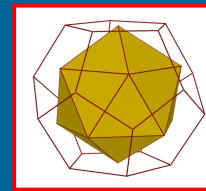
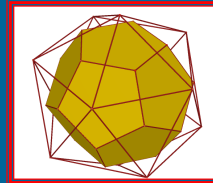
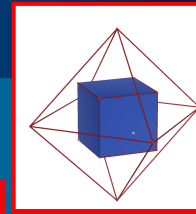
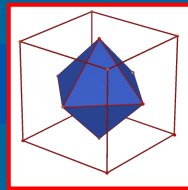
tetraedro	ottaedro	cubo	dodecaedr	icosaedro
(3,3)	(3,4)	(4,3)	(5,3)	(3,5)

dualità

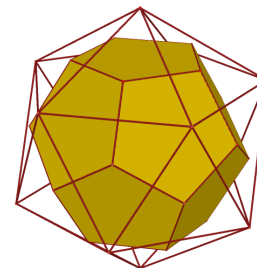
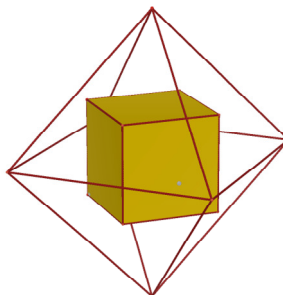
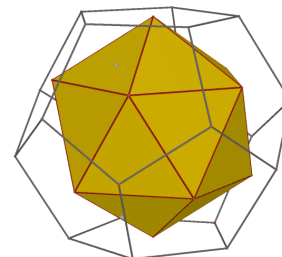
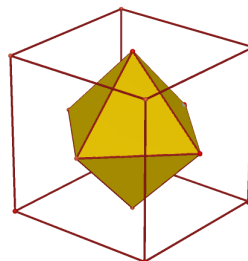
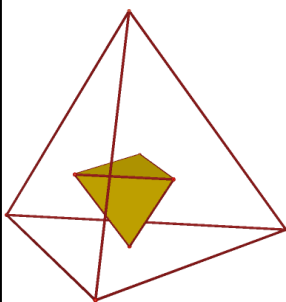


## Dualità

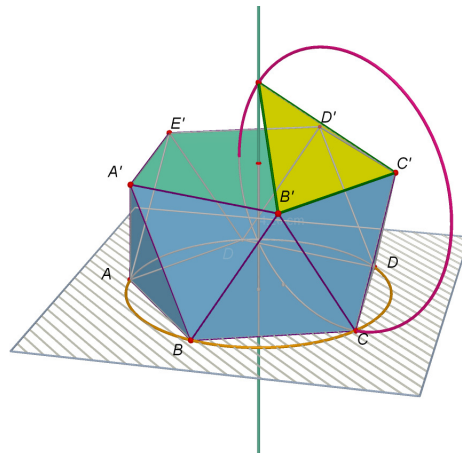
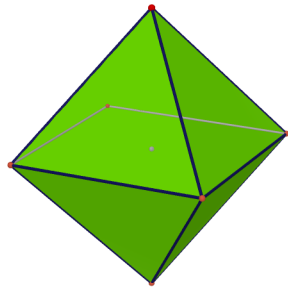
- se consideriamo il centro di ciascuna faccia di un poliedro regolare e congiungiamo i centri delle facce che hanno uno spigolo in comune, otteniamo un altro poliedro regolare.



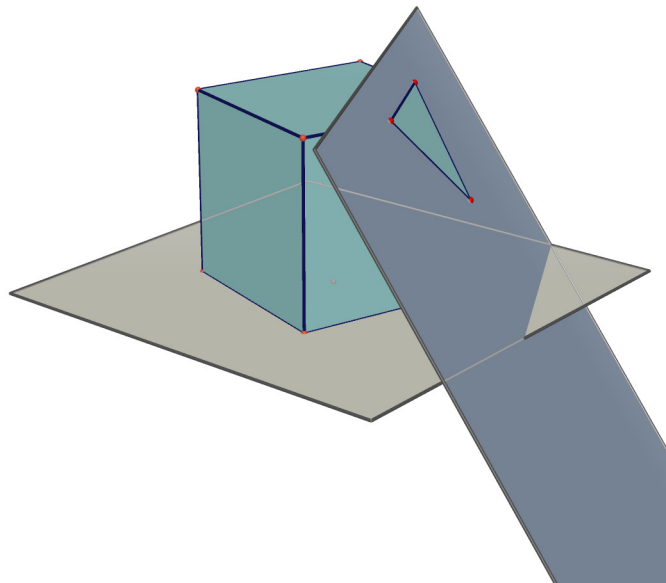
## Dualità tra i poliedri regolari



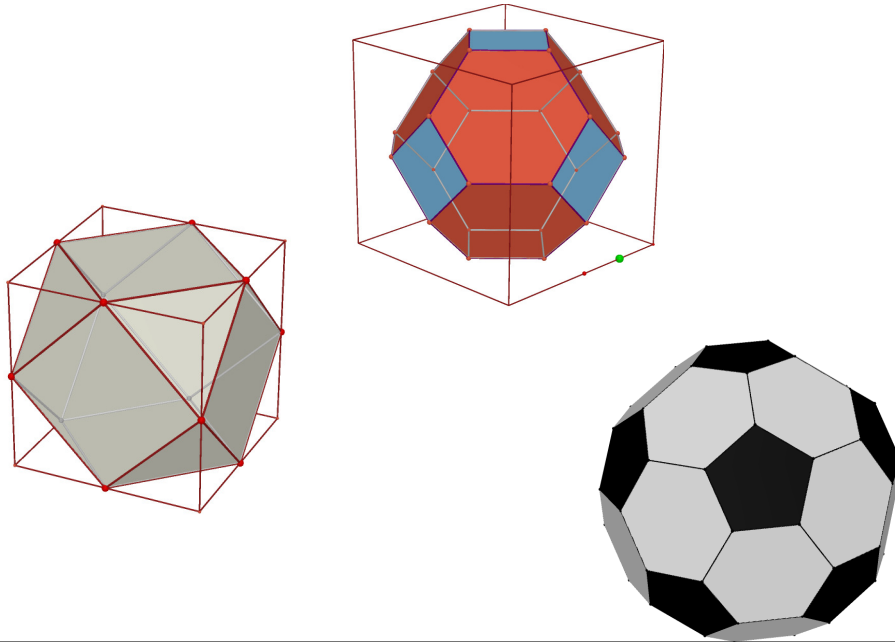
## Costruzione dei poliedri regolari con “riga e compasso”



## Troncamenti di poliedri

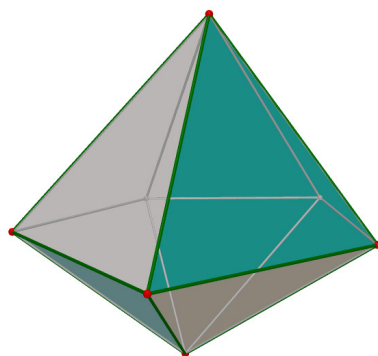


## Alcuni poliedri archimedei



## La formula di Eulero (1707-1783) per i poliedri

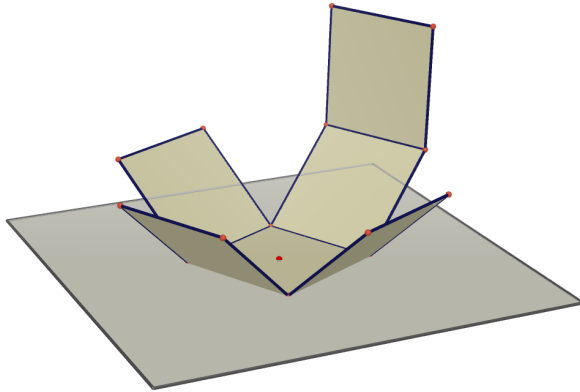
$$V + F = S + ?$$



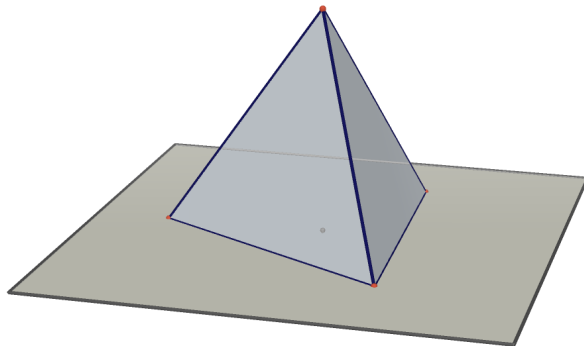
Vedi I. Lakatos, *Dimostrazioni e confutazioni. La logica della scoperta matematica*

## **Sviluppo di un poliedro (e costruzione di un modello)**

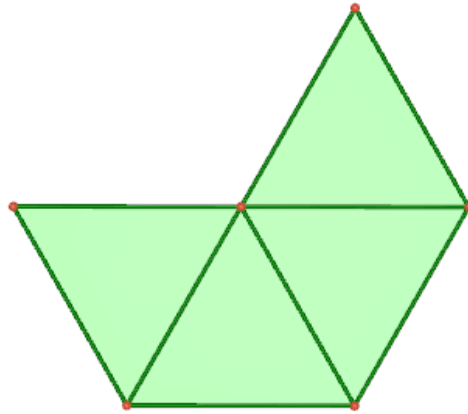
dallo spazio al piano; possibile difficoltà didattica:  
*Cabri 3D* fornisce *un solo* sviluppo di un poliedro



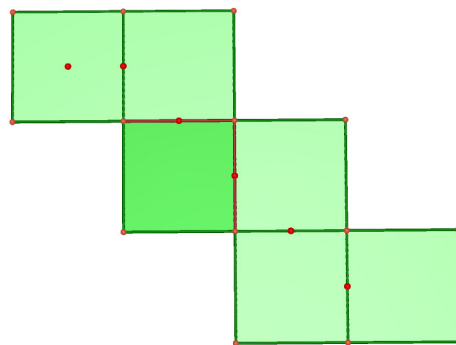
## **Il tetraedro regolare: sviluppi possibili**



**Questo è lo sviluppo di un tetraedro regolare?**

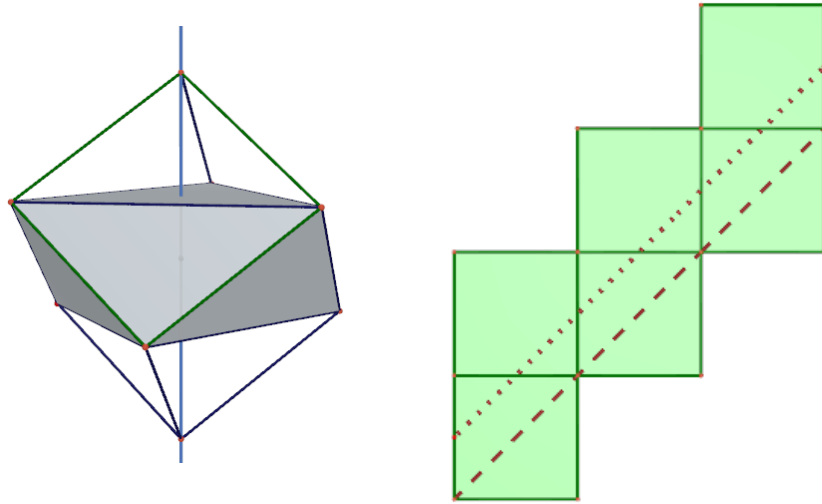


**Questo è lo sviluppo di un cubo?**

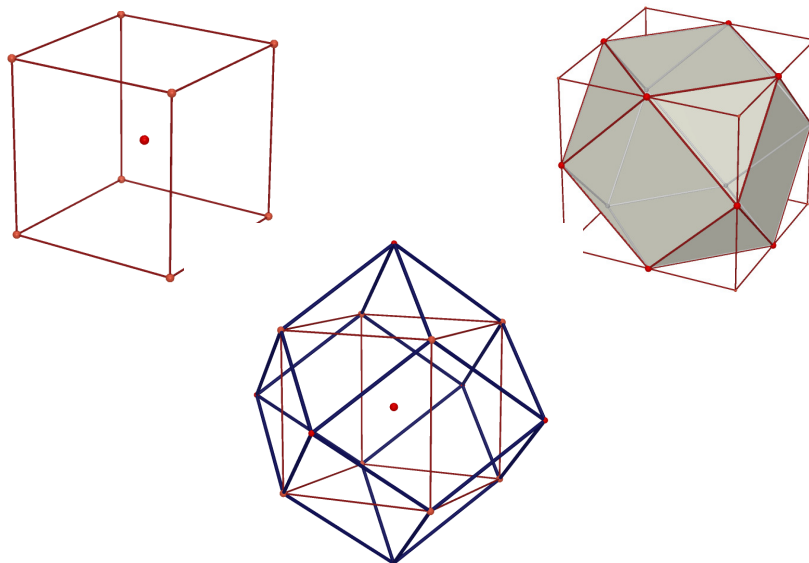


**Quanti sono i possibili sviluppi di un cubo?**

## Un poliedro particolare ottenuto dal cubo

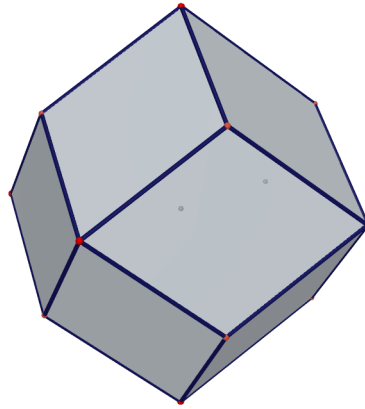


## Cubo, cubottaedro e dodecaedro rombico: variazioni sul tema

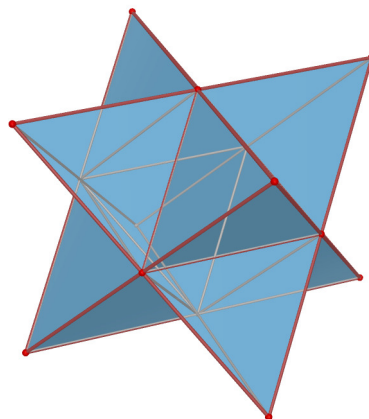




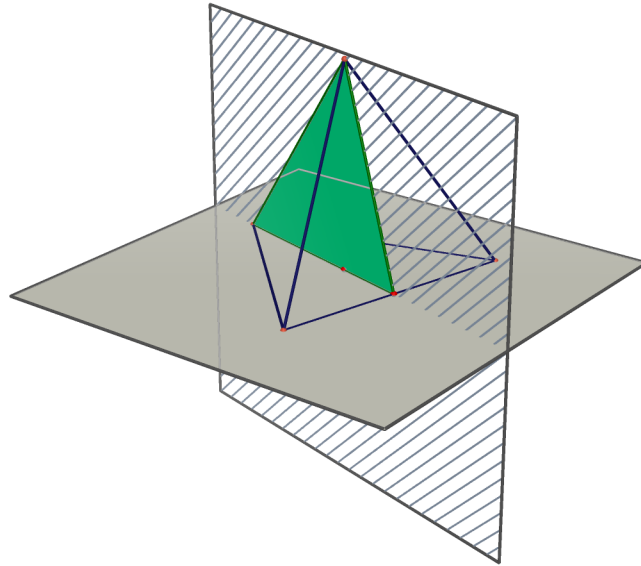
## **Dodecaedro rombico: variazione sul tema**



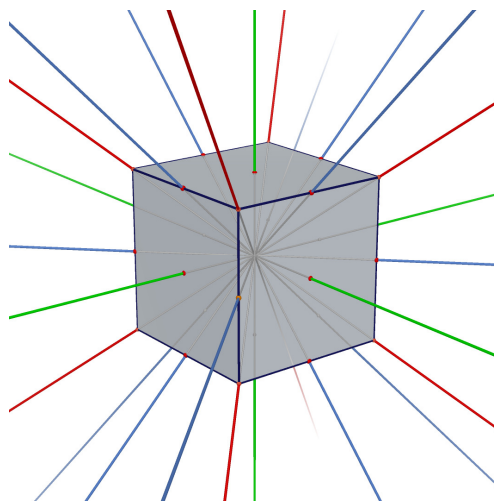
## **Stella octangula**



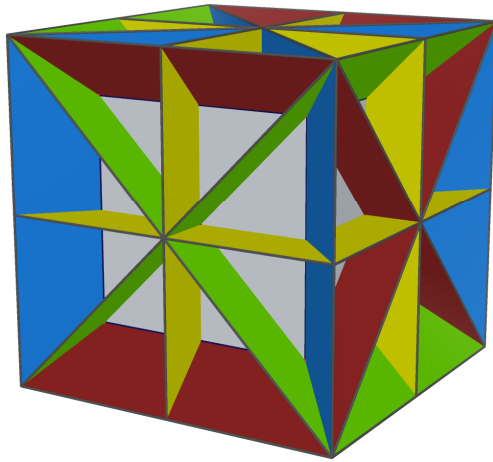
## Simmetrie dei poliedri



## Assi di simmetria di un cubo



## **Piani di simmetria di un cubo**



**Poliedri come modelli  
del mondo reale**

## I solidi platonici in natura

- I solidi platonici sono presenti in natura sotto diverse forme.
- La struttura dei cristalli presenta infatti simmetrie e forme spesso riconducibili ai solidi platonici.
- Nelle strutture di alcuni cristalli - quali ad esempio il salgemma, l'ossido di ferro e la pirite – si può riconoscere in essi eventuali solidi platonici (cubo, ottaedro, dodecaedro regolari).

## Cristalli



Cristalli di fluorite  
( $\text{CaF}_2$ )



Pirite  
( $\text{FeS}_2$ )

## Cristalli

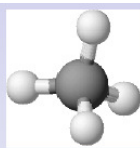
Magnetite  
( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ )



Cristalli di quarzo  
( $\text{SiO}_2$ )



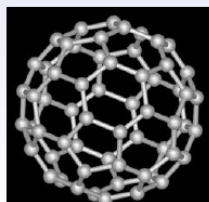
## Metano e altre molecole



Metano ( $\text{CH}_4$ )



Esafluoruro di zolfo  
( $\text{SF}_6$ )

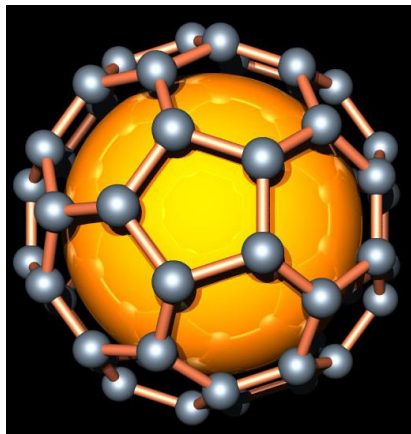


$\text{C}_{60}$  (famiglia dei Fullereni)  
(icosaedro troncato)

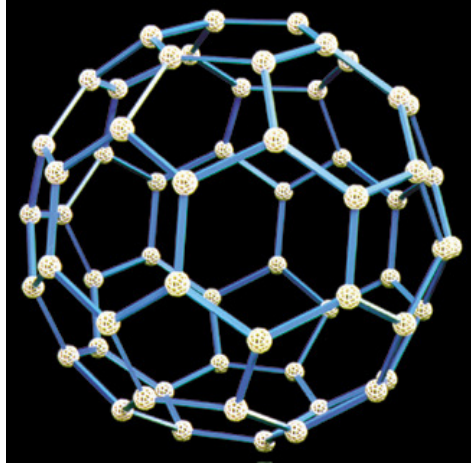
## I solidi platonici in natura

- È significativo presentare la forma spaziale della molecola di carbonio C<sub>60</sub>, scoperta nel 1985 da Harold Kroto, Robert F. Curl e Richard E. Smalley (detto *fullerene*), che presenta una struttura poliedrica e consente una riflessione su alcune proprietà.

## Fullerene (icosaedro troncato)



## Fullerene (icosaedro troncato)



## Poliedri (piramidi di Giza)



## Poliedri (Castel del Monte)



## Montreal : cupola geodetica per l'Expo





## Montreal : cupola geodetica per l'Expo

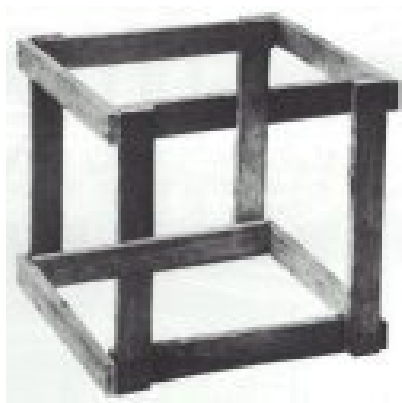


La geometria e le sue regole, applicate al disegno, permettono di rappresentare quello che si vede in modo tale che il cervello lo ritenga simile alla realtà.

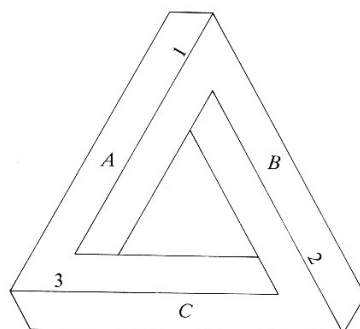
Questo metodo consente anche di “ingannare” l’occhio e di rappresentare oggetti o spazi in false prospettive e renderli “impossibili”.

Una **figura impossibile** è quindi un disegno che rappresenta qualcosa che non può esistere nel mondo reale, ma costruito in modo che il cervello, almeno inizialmente (o in una sua parte) lo ritenga simile alla realtà.

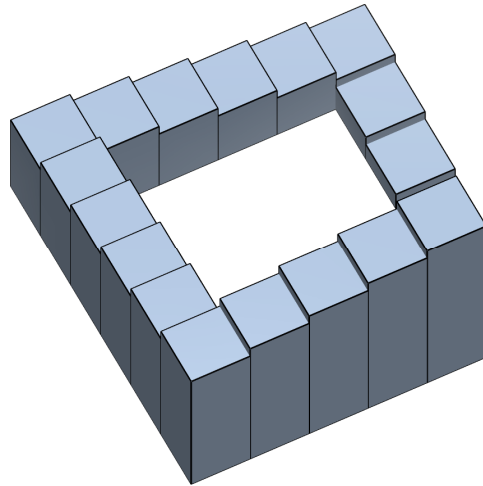
## Cubo di Necker



## Figura impossibile (triangolo di Penrose)



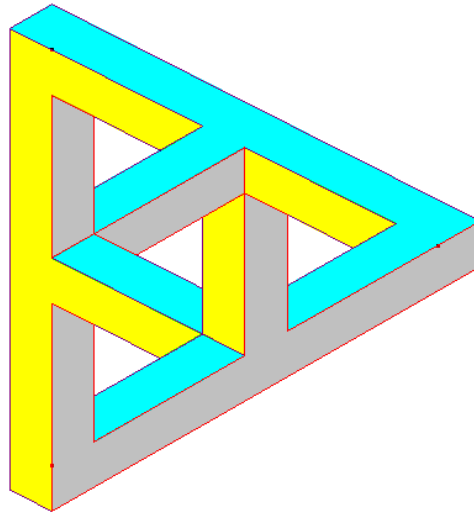
## Scale impossibili (Escher)



## Scale impossibili (Escher)



## Figura impossibile (Oskar Reutesvard)



## Conclusioni

- I poliedri nascono dal mondo reale e poi sono diventati “oggetti” della matematica.
- Tuttavia la matematica, con i suoi metodi - fondati sulla generalizzazione, l'astrazione e la dimostrazione,... - ha in un certo senso reinventato questi oggetti
- Per poi utilizzarli nuovamente nella interpretazione del mondo reale ed anche per esplorare “mondi”, come ad esempio oggetti in più dimensioni o addirittura in infinite dimensioni.

***Non accorderemo a nessuno  
[di dire] che vi siano corpi  
visibili più belli di questi***

**Platone**